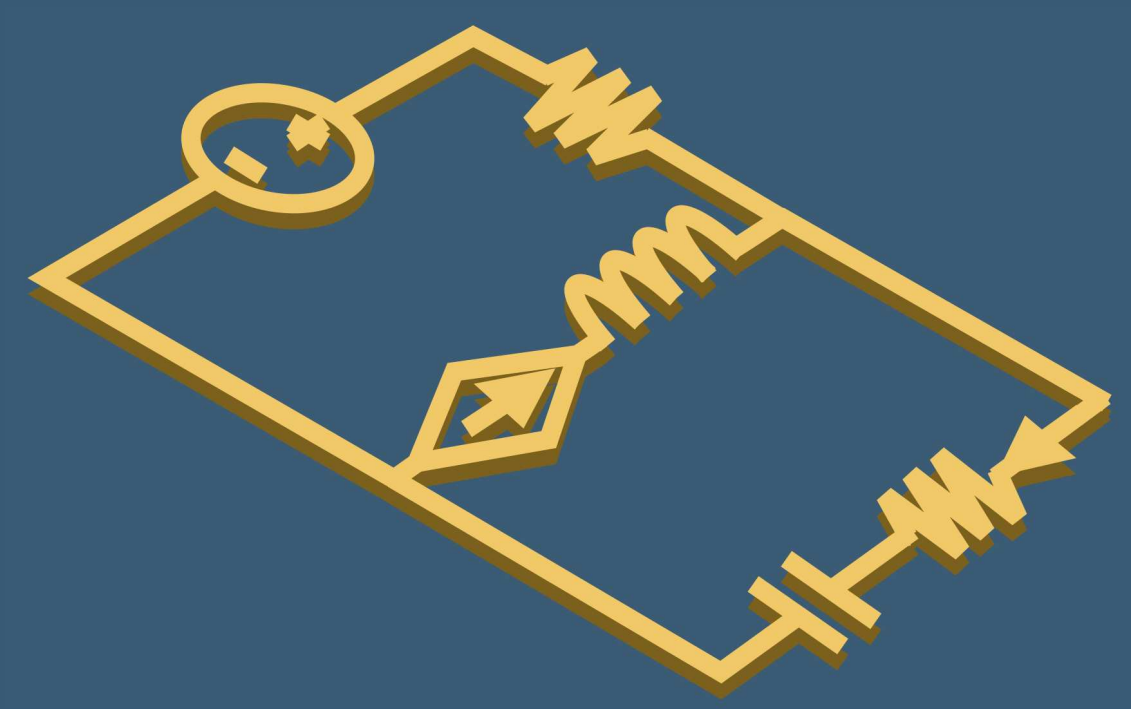




CIRCUITOS ELÉTRICOS E ELETROTÉCNICA

Fundamentos e Aplicações

Eudemario Souza de Santana
Irênio de Jesus Silva Júnior

3ª edição

Edição dos autores

CIRCUITOS ELÉTRICOS E ELETROTÉCNICA

Fundamentos e Aplicações

Eudemario Souza de Santana
Irênio de Jesus Silva Júnior

3ª edição

Edição dos autores

A primeira edição deste livro era intitulado “Teoria e Análise de Circuitos Elétricos para Cursos Técnicos e Tecnológicos” e a partir da segunda edição tornou-se “Circuitos Elétricos e Eletrotécnica - Fundamentos e Aplicações”, de forma que o título ficasse adequado ao conteúdo adicionado.

Este texto foi concebido exclusivamente para fins educacionais. Ainda que as revisões das novas edições tenham sido rigorosas, os autores não garantem a inexistência de erros e imprecisões nos conceitos, nas explicações e nos cálculos. Este livro não foi concebido para utilização em projetos de engenharia, ainda que a base necessária para entendimento e realização de projetos seja tratada no texto.

Este livro pode e deve ser utilizado integralmente ou em partes por qualquer pessoa para qualquer fim educacional. Pode-se utilizar este livro na versão digital ou impressa como livro-texto ou bibliografia complementar de cursos: gratuitos ou pagos; abertos a todo público ou privados; *online* ou presenciais; outras formas não pensadas pelos autores. É recomendado que o arquivo digital deste livro seja compartilhado via *Internet* por qualquer pessoa com qualquer outra. É também recomendado que cópias impressas deste livro sejam disponibilizadas em copiadoras de qualquer lugar, em especial de instituições de ensino técnico e universitário, e que estejam disponibilizadas também em bibliotecas físicas para acesso de qualquer docente ou estudante. É proibido cobrar pelo acesso ao arquivo digital do presente livro ou pela versão impressa (excluídos neste caso os custos de mão-de-obra e materiais para confecção das cópias físicas).

Edição feita pelos autores

Palavras-chave: Circuitos elétricos; Eletrotécnica; Corrente contínua; Corrente alternada

Versão: setembro de 2025



Conteúdo

Apresentação	1
1 Matemática elementar e notação	7
1.1 Introdução	7
1.2 Notação e nomenclaturas em circuitos elétricos	7
1.2.1 Grandezas e suas unidades	7
1.3 Definições de termos	8
1.3.1 Notação científica	10
1.4 Múltiplos e submúltiplos	14
1.5 Resumo do capítulo	15
Problemas propostos	16
I Circuitos elétricos com tensões e correntes contínuas	17
2 Fundamentos de eletricidade	18
2.1 Introdução	18
2.2 Estrutura atômica da matéria	18
2.3 Tensão (d.d.p.) e corrente elétrica	19
2.4 Materiais condutores, isolantes e semicondutores	21
2.5 Resistência e condutância elétricas	22
2.6 Resistor	23
2.7 Cálculo do valor da resistência	26
2.7.1 Resistividade	26
2.8 Resistência variando com a temperatura	29
2.9 Reostato	32
2.10 Potência	33
2.10.1 Efeito Joule	33
2.10.2 Equações de potência elétrica	35
2.11 Resumo do capítulo	36
Problemas propostos	37
3 Circuitos resistivos básicos	40
3.1 Introdução	40
3.2 Associação de resistências	40
3.2.1 Associação de resistências em série	41
3.2.2 Associação de resistências em paralelo	43
3.2.3 Associação mista de resistências	46
3.3 Resistência equivalente vista de vários terminais	50
3.4 Curto-circuito	52
3.5 Divisores de tensão e de corrente	56

3.5.1	Divisor de tensão	56
3.5.2	Divisor de corrente	58
3.6	Resumo do capítulo	61
	Problemas propostos	61
4	Aparelhos medidores de grandezas elétricas	67
4.1	Introdução	67
4.2	Medidores analógico e digital	67
4.3	Amperímetro	67
4.4	Voltímetro	69
4.5	Ohmímetro	70
4.6	Wattímetro	71
4.7	Multímetro	72
4.8	Resumo do capítulo	74
	Problemas propostos	74
5	Solução de sistemas de equações lineares	76
5.1	Introdução	76
5.2	Conceitos de sistemas de equações lineares	76
5.3	Métodos de solução de sistemas de equações lineares	77
5.3.1	Método da substituição	77
5.3.2	Método da igualdade	79
5.3.3	Método da adição	80
5.4	Mais exemplos	82
5.5	Resumo do capítulo	85
	Problemas propostos	85
6	Técnicas para solução de circuitos CC	87
6.1	Introdução	87
6.2	Definições	87
6.3	Leis de Kirchhoff	91
6.4	Análise de malhas	93
6.4.1	Associação de fontes de tensão	98
6.4.2	Análise de malhas com fontes de corrente	104
6.4.3	Supermalha	105
6.4.4	Análise de malhas por inspeção	107
6.5	Análise de nós	109
6.5.1	Supernó	112
6.5.2	Análise de nós por inspeção	114
6.6	Teorema da superposição	116
6.7	Teorema de Thévenin	119
6.8	Teorema de Norton	123
6.9	Relações entre os teoremas de Thévenin e de Norton	126
6.10	Resumo do capítulo	127
	Problemas propostos	128
7	Energia, eficiência e tarifação	132
7.1	Introdução	132
7.2	Energia elétrica	132
7.3	Potência elétrica	133
7.4	Eficiência (rendimento)	134
7.5	Tarifação	136

7.6	Resumo do capítulo	137
	Problemas propostos	138
II	Circuitos elétricos com tensões e correntes alternadas	139
8	Trigonometria e números complexos	140
8.1	Introdução	140
8.2	Círculo trigonométrico	140
8.2.1	Senos e cossenos	143
8.3	Relações trigonométricas em um triângulo retângulo	144
8.4	Sinais alternados senoidais/cossenoidais	147
8.5	Números complexos	151
8.5.1	Operações entre números complexos	154
8.6	Resumo do capítulo	159
	Problemas propostos	160
9	Circuitos indutivos e capacitivos	163
9.1	Introdução	163
9.2	Circuito indutivo	163
9.2.1	Indutância e indutor	163
9.2.2	Associação de indutâncias	168
9.2.3	Associação mista de indutâncias	170
9.3	Circuito capacitivo	173
9.3.1	Capacitância e capacitor	173
9.3.2	Associação de capacitâncias	177
9.4	Resumo de capítulo	182
	Problemas propostos	182
10	Circuitos básicos com impedâncias	184
10.1	Introdução	184
10.2	Valor eficaz de um sinal alternado senoidal	184
10.3	Representação fasorial de grandezas senoidais	187
10.4	Relações fasoriais para os elementos de circuitos: resistência, indutância e capacitância	188
10.4.1	Resistência	188
10.4.2	Indutância e reatância indutivas	189
10.4.3	Capacitância/Reatância capacitiva	190
10.4.4	Impedância complexa	192
10.4.5	Associação de impedâncias	195
10.5	Frequência de ressonância	200
10.6	Divisores de tensão e de corrente	202
10.6.1	Divisor de tensão	203
10.6.2	Divisor de corrente	204
10.6.3	Admitância Complexa	206
10.6.4	Associação de admitâncias	208
10.7	Resumo do capítulo	210
	Problemas propostos	211
11	Potência em circuitos monofásicos	213
11.1	Introdução	213
11.2	Potências complexa, aparente, ativa e reativa	213
11.2.1	Fator de potência	220
11.2.2	Triângulo de potências	224

11.3	Resumo do capítulo	227
	Problemas propostos	227
12	Sistemas de equações com números complexos	229
12.1	Introdução	229
12.2	Solução de sistemas de equações com números complexos	229
12.2.1	Método da igualdade	229
12.2.2	Método da substituição	233
12.3	Resumo do capítulo	235
	Problemas propostos	235
13	Técnicas para solução de circuitos CA	236
13.1	Introdução	236
13.2	Definições	236
13.3	Leis de Kirchhoff	237
13.4	Análise de malhas	241
13.4.1	Análise de malhas com fontes de corrente	244
13.4.2	Supermalha	246
13.4.3	Análise de malhas por inspeção	248
13.5	Análise de nós	250
13.5.1	Supernó	252
13.5.2	Análise de nós por inspeção	255
13.6	Teorema da superposição	257
13.7	Teorema de Thévenin	259
13.8	Teorema de Norton	263
13.9	Relações entre os teoremas de Thévenin e de Norton	267
13.10	Resumo do capítulo	268
	Problemas propostos	269
14	Energia, eficiência, correção de fator de potência e tarifação	273
14.1	Introdução	273
14.2	Eficiência em motor CA	273
14.3	Correção do fator de potência	277
14.4	Energia e tarifação em sistemas elétricos CA	282
14.5	Resumo do capítulo	284
	Problemas propostos	285
III	Circuitos elétricos trifásicos	287
15	Circuitos elétricos trifásicos	288
15.1	Introdução	288
15.2	Geradores conectados em estrela (Y) e em triângulo (Δ)	288
15.2.1	Geradores equilibrados conectados em estrela ou Y	289
15.2.2	Geradores equilibrados conectados em triângulo ou Δ	291
15.3	Cargas conectadas em estrela (Y) e em triângulo (Δ)	293
15.3.1	Cargas equilibradas conectados em estrela (Y)	293
15.3.2	Cargas equilibradas conectados em triângulo (Δ)	298
15.4	Potências complexa, aparente, ativa e reativa em sistemas trifásicos	302
15.5	Triângulo de potências	304
15.6	Transformações $Y \rightarrow \Delta$ e $\Delta \rightarrow Y$	307
15.7	Resumo do capítulo	309
	Problemas propostos	309

16 Cargas trifásicas desequilibradas	312
16.1 Introdução	312
16.2 Carga trifásica desequilibrada	312
16.3 Resumo do capítulo	320
Problemas propostos	320
17 Aplicações da teoria de circuitos trifásicos	322
17.1 Introdução	322
17.2 Eficiência e motores de indução trifásicos	322
17.3 Correção do fator de potência	325
17.4 Potência, energia, eficiência e tarifação	335
17.5 Resumo do capítulo	337
Problemas propostos	338
A Sugestões de cursos adicionais	340
A.1 Análise de circuitos em corrente contínua com fontes dependentes	340
A.2 Análise de circuitos magneticamente acoplados	340
B Respostas dos problemas propostos	342
Referências	349
Índice	350

Lista de Videoaulas

1.1	Videoaula (Definições de CC e CA)	10
1.2	Videoaula (Cálculos utilizando a potência de 10)	14
1.3	Videoaula (Como utilizar múltiplos e submúltiplos)	15
2.1	Videoaula (Sobre definições de tensão e corrente)	21
2.2	Videoaula (Sobre a lei de Ohm)	25
2.3	Videoaula (Resistividade dos materiais e a resistência de dispositivos)	29
2.4	Videoaula (Sobre o efeito Joule a a potência elétrica)	34
2.5	Videoaula (Cálculos de potência elétrica)	36
3.1	Videoaula (Sobre R_{eq} e associação de resistências em série)	43
3.2	Videoaula (Sobre associação de resistências em paralelo)	46
3.3	Videoaula (Sobre casos especiais da associação em paralelo de resistências)	46
3.4	Videoaula (Sobre associação mista de resistências)	50
3.5	Videoaula (Sobre R_{eq} vista de vários terminais)	52
3.6	Videoaula (Sobre R_{eq} em circuitos com curto)	56
3.7	Videoaula (Sobre o divisor resistivo de tensão)	58
3.8	Videoaula (Sobre o divisor resistivo de corrente)	60
4.1	Videoaula (Sobre medição em circuitos CC)	73
5.1	Videoaula (Métodos de solução de sistemas lineares)	82
5.2	Videoaula (Sobre a Regra de Cramer para solução de sistemas lineares)	85
6.1	Videoaula (Pré-requisitos para entender as leis de Kirchhoff)	90
6.2	Videoaula (Sobre as 1ª e 2ª leis de Kirchhoff)	93
6.3	Videoaula (Sobre o método análise de malhas)	97
6.4	Videoaula (Exemplo utilizando o método análise de malhas)	98
6.5	Videoaula (Associação de fontes de tensão)	101
6.6	Videoaula (Sobre o básico de placas fotovoltaicas)	104
6.7	Videoaula (Análise de malhas em circuitos com fontes de corrente)	105
6.8	Videoaula (Sobre o uso da supermalha)	107
6.9	Videoaula (Análise de malhas por inspeção)	109
6.10	Videoaula (Sobre a análise de nós)	111
6.11	Videoaula (Sobre o uso do supernó)	114
6.12	Videoaula (Análise de nós por inspeção)	116
6.13	Videoaula (Teorema da superposição em circuitos CC)	118
6.14	Videoaula (Teorema de Thévenin - Circuitos CC)	122
6.15	Videoaula (Teorema de Norton - Circuitos CC)	126
6.16	Videoaula (Relações entre os teoremas de Thévenin e de Norton - Circuitos CC)	127
7.1	Videoaula (Relação entre potência e eficiência energética)	136

7.2	Videoaula (Sobre a tarifação de energia elétrica)	137
8.1	Videoaula (Conceitos básicos de trigonometria)	143
8.2	Videoaula (Sobre relações trigonométricas)	147
8.3	Videoaula (Sinais alternados senoidais e cossenoidais)	151
8.4	Videoaula (Definição de números complexos)	154
8.5	Videoaula (Operações com números complexos)	159
9.1	Videoaula (Indutância e indutor)	173
9.2	Videoaula (Capacitância e capacitor)	181
10.1	Videoaula (Valor eficaz de grandezas senoidais/cossenoidais)	187
10.2	Videoaula (Como representar formas de onda cossenoidais como fasores)	188
10.3	Videoaula (Reatâncias indutiva e capacitiva)	192
10.4	Videoaula (Impedância complexa)	194
10.5	Videoaula (Associação de impedâncias)	199
10.6	Videoaula (Frequência de ressonância)	202
10.7	Videoaula (Divisores de tensão e de corrente)	206
10.8	Videoaula (Admitância complexa)	207
11.1	Videoaula (Potências ativa e reativa)	217
11.2	Videoaula (Potências complexa e aparente)	219
11.3	Videoaula (Potências complexa, aparente, ativa e reativa)	220
11.4	Videoaula (Fator de potência)	224
11.5	Videoaula (Triângulo de potências)	226
12.1	Videoaula (Solução de sistemas lineares com números complexos)	234
13.1	Videoaula (Leis de Kirchhoff - circuitos CA)	241
13.2	Videoaula (Sobre o método análise de malhas em circuitos CA)	246
13.3	Videoaula (Técnica da supermalha em circuitos CA)	248
13.4	Videoaula (Análise de malhas por inspeção em circuitos CA)	250
13.5	Videoaula (Análise de nós em circuitos CA)	252
13.6	Videoaula (Técnica do supernó em circuitos CA)	254
13.7	Videoaula (Análise de nós por inspeção em circuitos CA)	257
13.8	Videoaula (Teorema da superposição em circuitos CA)	259
13.9	Videoaula (Teoremas de Thévenin e de Norton em circuitos CA)	268
14.1	Videoaula (Corrente em motor CA monofásico)	277
14.2	Videoaula (Correção do fator de potência em rede CA monofásica)	281
14.3	Videoaula (Tarifação da energia elétrica em rede CA monofásica)	284
15.1	Videoaula (Gerador trifásico conectado em Y e em Δ)	292
15.2	Videoaula (Sobre o $\sqrt{3}$ de valores de linha)	292
15.3	Videoaula (Análise de cargas conectadas em Y)	296
15.4	Videoaula (Corrente no neutro da conexão Y)	298
15.5	Videoaula (Análise de cargas conectadas em Δ)	301
15.6	Videoaula (Exemplo: gerador em Y e carga em Δ)	302
15.7	Videoaula (Potências em circuitos 3Φ)	304
15.8	Videoaula (Fator de potência em circuitos 3Φ)	304
15.9	Videoaula (Triângulo de potências - circuitos 3Φ)	307
15.10	Videoaula (Transformação $Y \rightleftharpoons \Delta$)	308
16.1	Videoaula (Carga 3Φ desequilibrada)	320

17.1	Videoaula (Corrente em motor CA 3Φ)	325
17.2	Videoaula (Correção do fator de potência de cargas 3Φ)	334
A.1	Videoaula (Técnicas de análise de circuitos CC com fontes dependentes)	340
A.2	Videoaula (Análise de circuitos magneticamente acoplados)	341

Apresentação

A cada ano aumenta o número de pessoas que desfrutam nas suas residências ou nos seus locais de trabalho de algum benefício trazido pela eletricidade. Em algumas localidades isoladas a rede elétrica ainda não está disponível, ainda assim há como instalar um gerador elétrico acoplado a um motor a diesel ou a uma turbina eólica, usar placas fotovoltaicas, entre outras soluções, para geração de energia elétrica. Portanto, em quase todos os locais é possível conectar algum dispositivo a uma tomada e se beneficiar de aplicações de vários tipos como, por exemplo, telefonia, *Internet*, aquecimento ou resfriamento de ambientes ou alimentos etc. Algumas das formas de se utilizar a eletricidade e alguns dispositivos elétricos que trazem algum tipo de benefícios à humanidade são descritos a seguir:

Iluminação É, dentre os vários benefícios trazidos pela eletricidade, um dos de maior destaque. Muitas tarefas simples como, por exemplo, estudar o conteúdo deste livro, só podem ser executadas à noite em ambientes bem iluminados por lâmpadas elétricas: tente se imaginar respondendo aos problemas propostos num ambiente com má iluminação para notar o quanto a lâmpada elétrica foi uma inovação impactante. Ainda há de se considerar a iluminação pública, cuja luminosidade contribui também para viabilizar a reunião de pessoas para prática esportiva ou um simples bate-papo, além de inibir ações de criminosos;

Motores elétricos São os dispositivos que transformam energia elétrica em energia mecânica, ou seja, transformam eletricidade em movimento. Nas residências têm-se as máquinas de lavar, que transformam a eletricidade em movimentos de peças que fazem as roupas se movimentarem em um meio com água e sabão, retirando as sujeiras dos tecidos. Outra aplicação é o carro elétrico, que transforma a eletricidade em movimento rotativo das rodas e pneus. Os motores elétricos são extensivamente utilizados na indústria, sendo eles os dispositivos que consomem a maior parte da energia elétrica no meio industrial;

Geradores elétricos São os dispositivos que transformam energia química, mecânica, entre outras, em energia elétrica. Nas usinas hidrelétricas transforma-se a energia do movimento das águas em energia elétrica, sendo que no Brasil a maior parte da energia elétrica é gerada desta maneira. Outro tipo de gerador elétrico é a bateria, que transforma energia química em energia elétrica. As baterias são muito utilizadas em equipamentos portáteis;

Aparelhos eletrônicos A evolução da eletrônica permitiu o desenvolvimento de dispositivos de memória, cuja função é guardar informações, e de processamento, cuja função é realizar cálculos e operações lógicas, cada vez menores e mais eficientes. Atualmente, mesmo em localidades pobres, há nas residências algum dispositivo cuja construção é baseada no uso da eletrônica, como os televisores, telefones celulares, computadores, entre outros. Estes dispositivos citados permitem que qualquer pessoa possa se informar e opinar a respeito de questões importantes, mesmo que não more nos centros urbanos;

Dispositivos médicos Uma rápida olhada em um leito hospitalar evidencia as aplicações da eletricidade como um meio de monitoramento de doenças e no auxílio em tratamentos de saúde. Utilizam conceitos de eletricidade: equipamentos portáteis, como, por exemplo, um reanimador cardíaco (aparelho que dá descargas elétricas no peito de alguém que sofreu uma parada cardíaca) e enormes dispositivos de ressonância magnética que permitem criar imagens de órgãos

do corpo humano. Além dos aparelhos médicos, há também toda a infraestrutura montada no hospital. Por exemplo, os hospitais possuem gerador elétrico em suas instalações, assim, quando há problemas no fornecimento de energia elétrica pela rede de distribuição, o gerador elétrico entra em operação, garantindo o funcionamento da iluminação de emergência e dos aparelhos básicos para a manutenção da vida dos pacientes. O desenvolvimento da eletrônica tem tornado os aparelhos médicos cada vez menores e, sendo eles portáteis, já são levados em ambulâncias. Alguns menores e mais baratos são encontrados em residências (termômetro digital, medidor de glicemia digital, entre outros). Hoje em dia o monitoramento da saúde pode ser feito até mesmo por um *smart watch* ou outros pequenos dispositivos portáteis.

Há ainda muitos outros usos da eletricidade que poderiam ser citados, porém a quantidade de aplicações descritas deve ter sido suficiente para convencer o estudante da importância de se estudar dispositivos elétricos e, portanto, a teoria de circuitos elétricos. Para o uso minimamente adequado de equipamentos elétricos, o profissional deve receber formação adequada: é esperado que o conteúdo deste livro ajude nisto.

Muitos cursos são voltados para formação específica de profissionais cujas habilidades permitem a eles lidar de maneira eficiente e segura com uma diversidade de equipamentos elétricos. Alguns desses cursos são destacados a seguir:

Eletrônica Área formadora de profissionais de níveis médio e superior que dominam os circuitos elétricos que possuem entre seus componentes elementos construídos com semicondutores (diodos, transistores, entre outros). Estes profissionais projetam, montam e realizam manutenção em equipamentos eletrônicos diversos. Também devem conhecer padrões para verificar a compatibilidade de dispositivos eletrônicos utilizados em conjunto. O presente livro não tratará de eletrônica;

Eletrotécnica Engenheiros eletricitas e técnicos habilitados na área de eletrotécnica projetam, operam, montam e realizam manutenção em equipamentos que geram, transformam ou consomem elevada quantidade de potência. Durante o curso são estudados os dispositivos e também como eles operam quando são interligados: um motor de indução para partir precisa ser alimentado por uma rede elétrica, mas também deve ser conectado aos dispositivos para comando (permitem ligar e desligar quando for desejo do operador) e proteção (ligam e desligam o motor automaticamente quando algum problema é identificado);

Eletroeletrônica Técnico que tem formação mista em eletrônica e em eletrotécnica. Há engenheiros que são habilitados em ambas as competências citadas também;

Eletromecânica Técnico que tem formação mista em mecânica e em eletrotécnica. Na parte de mecânica este tipo de técnico deve dominar conteúdos relativos a equipamentos como compressores, bombas etc. Na indústria, estes equipamentos são acionados por motores elétricos e, por isso, conhecer os conceitos de eletricidade é tão importante para este profissional;

Instrumentação O técnico instrumentista é responsável pela instalação, operação e manutenção dos dispositivos responsáveis pela medição de grandezas físicas de uma planta industrial. Ele deve ter conhecimento de como utilizar os sensores que medem grandezas como, por exemplo, pressão, temperatura, força, entre outras. Estes sensores geram um sinal elétrico proporcional à grandeza física medida e este sinal é utilizado nos computadores que controlam o processo industrial. Além de pessoal de nível técnico, há engenheiros que lidam com este tema, em especial na área de projetos, e são envolvidos de forma bem próxima com o pessoal da área de controle e automação;

Controle e Automação Engenheiros ou técnicos que detêm o conhecimento de como automatizar processos industriais, garantindo a operação contínua e eficiente sem a intervenção humana. Grande parte dos equipamentos em sistemas automatizados são elétricos, como, por exemplo, os motores elétricos, responsáveis, por exemplo, por gerar força para abrir ou fechar válvulas;

Telecomunicações Os dispositivos emissores e receptores de informação que operam sem o uso de fios (em inglês são chamados de *wireless*) são baseados nos princípios da teoria eletromagnética. Os dispositivos com fio também utilizam a eletricidade para realizar o transporte da informação, geralmente em *bits*: zeros e uns que na prática correspondem a dois níveis diferentes de tensão, como, por exemplo 0 volt e 3 volts, respectivamente. Se *bits* são empregados, então estes equipamentos são construídos com circuitos eletrônicos. Este profissional atua nas áreas de telefonia (fixa e móvel), sistemas de emissão e recepção de sinais de rádio e televisão, entre outras aplicações. Profissionais de níveis médio (técnico) e superior são formados para atuação nesta área;

Outros Mesmo profissionais cujas tarefas não tenham relação direta com a eletricidade são obrigados a conhecer um pouco da teoria e da prática da eletricidade. Por exemplo, os técnicos de informática devem saber como proceder para não queimar os computadores durante a manutenção deles. Os técnicos de enfermagem devem reconhecer que tipos de males a eletricidade causa no corpo humano. Todos os técnicos cuja formação é voltada para o trabalho industrial devem ter em mente procedimentos de segurança, para que não seja colocada em risco a vida de nenhuma pessoa e que também não danifiquem os equipamentos. Todas as engenharias são obrigadas a estudar uma disciplina sobre conceitos de eletricidade e de projetos elétricos em baixa tensão, portanto para todo este público o presente livro pode ser interessante também. Tenha em mente que projetos elétricos em baixa tensão são comumente feitos por técnicos de edificações e engenheiros civis, pois estes projetos podem interferir em outras partes de uma residência, como, por exemplo, as instalações hidráulicas e de gás.

Sugestões de conteúdos e videoaulas

O presente livro conta com sugestões de videoaulas complementares ao conteúdo aqui abordado, mas há indicação de vídeos no apêndice A sobre conteúdos que não foram abordados no presente em texto.

As videoaulas sugeridas estão postadas no canal Elétrica em Vídeos, que é uma iniciativa pessoal do autor Eudemario S. de Santana, e podem ser utilizadas para quaisquer fins educacionais em instituições públicas ou privadas. Veja o *link* do canal a seguir:

Apresentação 1 (Link para o canal **Elétrica em Vídeos**). Clique no *link* a seguir para ver um canal que se dedica a tratar de temas relacionados à Engenharia Elétrica:

- <https://www.youtube.com/c/EletricaemVideos>



Muitos estudantes irão no final do curso técnico ou de graduação estudar para concursos públicos e certamente precisarão de uma ajuda. Então te faço uma oferta: se inscreva no meu outro canal,

chamado E2S2 Concursos para Engenharia Elétrica e tenha acesso a centenas de videoaulas de discussão de questões de concursos de níveis médio e superior para estudar para os concursos mais difíceis e, quem sabe, conquistar o emprego público de seu interesse. O nome do canal é na verdade E^2S^2 , numa referência a Engenheiro Eudemario Souza de Santana. Inscreva-se no canal! *Link* a seguir:

Apresentação 2 (Link para o canal **E2S2 Concursos para Engenharia Elétrica**).
Clique no *link* a seguir para estudar com questões de concursos de níveis médio e superior:

- <https://www.youtube.com/@E2S2concursos>



Para você que ensina

Empregar ou não esta obra como livro-texto é uma decisão do docente responsável e na prática o livro adotado pelos estudantes é o que o professor recomendar e fizer uso corriqueiro. Esta obra foi feita pensando em ser o texto principal das disciplinas de circuitos de escolas técnicas e de disciplinas introdutórias à eletricidade ou aos circuitos elétricos em cursos superiores de engenharia (neste caso há uma particularidade sobre o bacharelado em Engenharia Elétrica que é discutido no último parágrafo desta seção).

Nos cursos superiores é possível que a presente obra seja o texto principal na parte introdutória de conceitos de eletricidade e dê espaço para outra obra posteriormente: por exemplo, livro específico de instalações elétricas residenciais ou industriais. Caso o docente tenha autonomia para decidir, os autores da presente obra acreditam que adotar este livro será uma boa opção, pois a linguagem é simples e os exemplos são abundantes em todos os capítulos. As videoaulas podem ajudar muito o professor, pois o uso de ferramentas de ensino *online* vem se tornando obrigatório e ter vídeos feitos por pessoas qualificadas e experientes não deixa de ser uma garantia de que os estudantes estarão bem direcionados quando estiverem estudando sozinhos com “aulas extras”. Não há custo em acessar nenhuma aula que possua *link* no presente livro e elas estão disponíveis 24h por dia e 7 dias por semana: acabaram-se as desculpas sobre não ter aprendido por causa da ausência numa aula ou por não gostar da didática do professor, pois as videoaulas são bem formuladas, bem executadas e com abordagem similar à presente obra.

Sobre o emprego do presente livro no bacharelado de engenharia elétrica: é sugerido que este livro seja adotado em conjunto com pelo menos mais um que seja mais avançado. Entenda-se por avançado o livro de circuitos elétricos que se dedique ao uso de soluções de transitórios e, portanto, empregue equações diferenciais e integrais nas resoluções de exercícios; livros mais avançados tratam também de análise em frequência, que não é tema da presente obra. Outra característica dos livros de circuitos elétricos mais avançados é o uso da álgebra matricial: esta permite encontrar simultaneamente várias variáveis e esta álgebra não é foco do presente livro, ainda que as técnicas de análises de circuitos elétricos por inspeção sejam até apresentadas aqui.

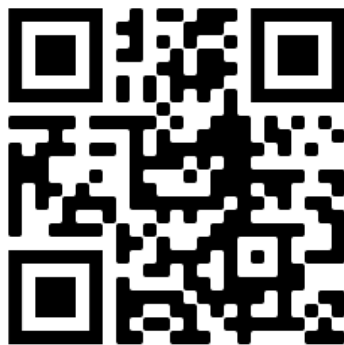
Sobre os autores

Os dois autores já possuem bastante experiência docente. Ainda que ambos tenham outras experiências profissionais, nas descrições feitas por cada um é dada ênfase às formações acadêmicas e às experiências docentes, já que pesquisas que rendam publicações qualificadas ou trabalhos profissionais mais avançados estão além do escopo da presente obra. Segue uma breve descrição da formação e carreira dos autores:

Eudemario Souza de Santana é Engenheiro Eletricista formado pela UFBA (2000), Mestre e Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP (2002 e 2007, respectivamente). Foi bolsista-recém-doutor no Departamento de Engenharia Elétrica e Computação da UFBA, no qual coorientou no curso de mestrado e lecionou disciplinas de graduação nos anos de 2007 e 2008. Já foi professor em regime de dedicação exclusiva do IFBA no *campus* da cidade de Camaçari/BA (2008-2010) e pediu exoneração para trabalhar na Grameyer, empresa privada de SC, no desenvolvimento de produtos eletroeletrônicos para controle de potência. Foi professor de graduação de várias universidades: da UNICAMP; da então UNERJ e atual Católica de Santa Catarina da cidade de Jaraguá do Sul; do CIMATEC e; da UNIFACS em Salvador/BA. Também foi membro permanente do Mestrado em Energia da UNIFACS (2017-2020). Atualmente é professor da UFBA. Outras formações e trabalhos foram omitidos para deixar esta descrição breve, mas você pode ver mais informações na *homepage* a seguir:

Apresentação 3 (Link para página profissional). Clique no *link* a seguir para ver a página profissional e acessar outros cursos *online* e também ler os artigos que foram publicados em um *blog* mantido pelo próprio professor:

- <https://www.eudemario.com.br>



Irênio Silva Junior é Engenheiro Eletricista formado pela UFBA (2000), Mestre e Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP (2002 e 2005, respectivamente). Foi bolsista recém-doutor no Departamento de Engenharia Elétrica da UFBA, onde ministrou aulas na Graduação e no Mestrado em Engenharia Elétrica nos anos de 2006 e 2007. Desde 2008 é Professor em regime de dedicação exclusiva no IFBA, atualmente está lotado no *campus* de Simões Filho/BA. Suas principais áreas de interesse são: Eficiência Energética, Comercialização de Energia Elétrica e Tributação sobre Energia Elétrica.

Veja os autores da presente obra na figura 1.



(a) Eudemario.



(b) Irênio.

Figura 1: Estão aí os autores do presente livro.

Capítulo 1

Matemática elementar e notação

1.1 Introdução

Saber realizar as operações matemáticas com números muito grandes ou muito pequenos é necessário nos estudos de eletricidade. Como valores muito pequenos surgem na eletrônica e muito grandes surgem na eletrotécnica, operar com números representados na base 10 torna-se necessário. Ainda no presente capítulo são apresentadas a notação de grandezas e parâmetros da eletricidade (um aquecimento para o que é explorado em detalhes no decorrer do livro) e as definições de grandezas contínuas, alternadas, periódicas e não periódicas. Que comece a diversão!

1.2 Notação e nomenclaturas em circuitos elétricos

A partir do próximo capítulo serão apresentados os primeiros conceitos relacionados aos fundamentos de circuitos elétricos, mas é conveniente que o estudante seja apresentado às grandezas elétricas básicas, para que alguns termos e conceitos tornem-se já familiares. O estudante que já compreende o conteúdo apresentado nas próximas seções do presente capítulo deve fazer apenas uma leitura rápida, porém o estudante que nunca estudou a teoria básica de eletricidade deve ler as próximas seções com muita atenção, já que isto facilitará o entendimento de conceitos expostos em capítulos subsequentes.

1.2.1 Grandezas e suas unidades

Na eletricidade há muitos fenômenos físicos de destaque, como, por exemplo, o aparecimento de uma tensão nos terminais de um fio que se move nas proximidades de um ímã, a circulação de corrente elétrica pelo corpo humano quando alguém toca em um terminal de uma tomada sem o uso de proteção adequada, o aquecimento dos fios ao dissipar calor devido à passagem de corrente elétrica etc. Note que para a descrição adequada do fenômeno é necessário entender também sobre grandezas físicas, como, por exemplo, corrente elétrica, tensão, potência, entre outras. Para simplificar o uso destas grandezas nas equações é preferível representá-las com símbolos ou letras. Assim a corrente elétrica é representada pela letra i ou I (minúscula para o valor instantâneo e maiúscula para o valor médio ou eficaz, mas você saberá diferenciar quando estudar capítulos mais avançados) enquanto um parâmetro elétrico como a resistividade é representado pela letra grega ρ (lê-se “rô”).

Outra definição importante é a unidade de cada grandeza. Isto fica claro quando são tomadas medidas de distância, que podem ser feitas em metros ou centímetros, por exemplo. A escolha da unidade a ser utilizada é feita de acordo com a situação. Caso deseje-se medir as dimensões de uma casa se usa o metro e caso deseje-se medir o comprimento de uma caneta utiliza-se o centímetro. No entanto, o uso de unidades diferentes pode causar confusão e erros nos cálculos. Para evitar isto foram criados vários sistemas de unidades, entre os quais um de destaque é o *Sistema Internacional* (SI), que é extensamente utilizado no presente livro, ainda que nem todas as grandezas aqui apresentadas estejam neste sistema. Saliente-se que também é usual representar a unidade com um símbolo, geralmente

uma letra. Desta maneira a unidade metro é representada pela letra m e a unidade de resistência, que é o ohm, é representado pela letra grega Ω : esta letra é o “ômega” maiúsculo, porém quando utilizada como unidade deve ser lida como ohm, ou seja, 15Ω deve ser lido como quinze ohms, não como quinze “ômega”.

A tabela 1.1 mostra alguns exemplos de grandezas elétricas e os símbolos que as representam, além da unidade da grandeza e sua abreviação. A melhor opção para o estudante aprender como se escreve cada um dos símbolos de grandeza e cada abreviação de unidade é estudando os exemplos e utilizando corretamente símbolos e abreviações nas soluções dos problemas propostos no final de cada capítulo. O estudante deve ficar atento ao fato de que a representação pode exigir que as letras sejam minúsculas ou maiúsculas: siga o padrão dado, pois é a forma habitual como a comunidade da eletricidade se comunica nos documentos técnicos. Uma tensão contínua de dez volts deve ser representada como 10 V (forma correta) e não como 10 v (forma errada!); dez hertz deve ser representado por 10 Hz (forma correta) e não como 10 HZ (forma errada!) ou 10 hz (também errada!). Como sugerido, estude os exemplos e exercite que você fixará a forma de representar as grandezas.

Tabela 1.1: Grandezas e suas unidades.

Grandeza	Símbolo da grandeza	Unidade	Abreviação da unidade
Tensão/d.d.p.	U	volt	V
Corrente elétrica	I	ampère	A
Frequência	f	hertz	Hz
Potência	P	watt	W
Resistência	R	ohm	Ω
Capacitância	C	farad	F
Indutância	L	henry	H

1.3 Definições de termos

Logo no início de um curso de circuitos elétricos o estudante se depara com termos como corrente alternada e corrente contínua, muitas vezes representados como CA e CC, respectivamente. Outras vezes são empregados termos como tensão CA e tensão CC. Com o intuito que se consiga compreender a utilização destes termos alguns conceitos são descritos a seguir.

As duas primeiras definições relevantes são relativas aos valores contínuos e alternados. Diz-se que uma função é contínua quando o seu sinal nunca muda: veja nos gráficos das figuras 1.1(a) e 1.1(b) que os valores de todas as tensões e correntes são sempre positivos, portanto, a rigor, são funções contínuas. Se todos os gráficos fossem sempre negativos também seriam contínuos. Porém há uma questão prática a ser dita: nos estudos introdutórios de circuitos elétricos o único sinal contínuo estudado é o constante.

Para entender sobre a corrente alternada é necessário antes ter em mente o conceito de função periódica. Esta é uma função que se repete no tempo de forma indefinida, ou seja, ela sempre existiu e sempre existirá de maneira que haja repetição na sua forma. Na prática um sinal elétrico terá iniciado em algum momento e deixará de existir em outro momento, mas, considerando que a quantidade de ciclos de repetição seja grande, então pode-se aproximar um sinal real como periódico. Veja os gráficos das figuras 1.1(c) e 1.1(d) e note que no primeiro deles há duas formas de onda (tensão e corrente) senoidais, que se repetem no tempo. O gráfico da figura 1.1(d) tem uma onda de tensão senoidal e uma onda de corrente distorcida, porém ela também se repete no tempo, então também é periódica. Para que uma onda seja alternada ela precisa ser periódica (repetir-se indefinidamente) e oscilar com valores positivos e negativos. Todas as formas de onda mostradas na figuras 1.1(c) e 1.1(d) são periódicas e alternadas, sendo portanto alternadas. Veja especificamente a forma do gráfico da corrente na figura 1.1(b): os valores se repetem de forma indefinida, então a função é periódica, porém não oscila entre valores positivos e negativos, então ela não é alternada. Nos gráficos da figura 1.1(a) as tensão e corrente são constantes e, portanto, se repetem (escolha um ponto e veja que ele tem os mesmos

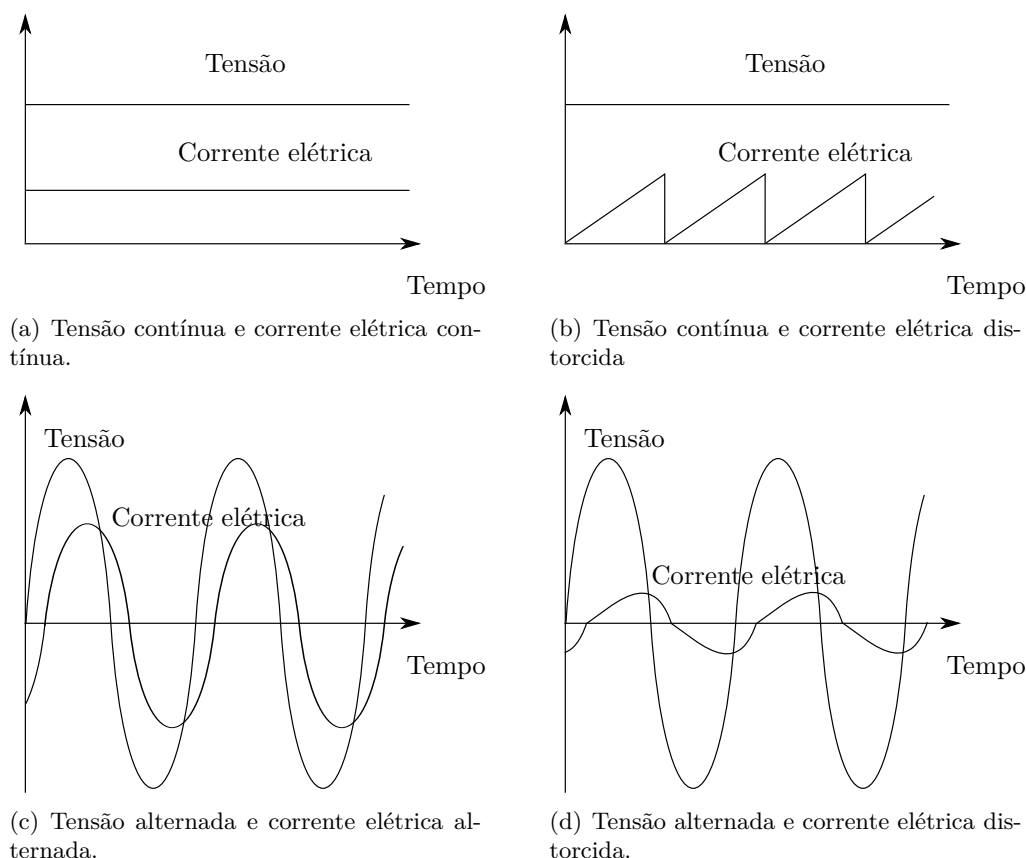


Figura 1.1: Formas de onda da tensão e da corrente elétrica.

valores instantes antes e depois): obviamente valores constantes são contínuos e não alternados, pois o sinal nunca se altera.

Considere que um motor elétrico é ligado a uma tomada (cuja tensão é alternada senoidal), então a corrente elétrica circulante terá a mesma forma, como mostrado na figura 1.1(c)). Entretanto, ao se ligar um aparelho eletrônico a uma tomada a forma da corrente elétrica não é senoidal, pois sofre distorção (como mostrado na figura 1.1(d)). Portanto, a fonte de tensão ser senoidal não é garantia que a corrente elétrica também seja senoidal.

Considere agora que um chuveiro elétrico é ligado a uma bateria (cuja tensão é constante), então a corrente elétrica circulante terá a mesma forma, ou seja, será uma corrente elétrica constante (como mostrado na figura 1.1(a)). Entretanto, ao se ligar um aparelho eletrônico a uma bateria a forma da corrente poderá ser triangular, como mostrado na figura 1.1(b). Portanto, a fonte de tensão ser constante não é garantia que a corrente elétrica seja constante. **Leia com atenção:** o presente livro trata apenas de cargas lineares, que são aquelas cujas formas da tensão e da corrente elétrica são as mesmas, ou seja, se uma tensão senoidal for aplicada em um dispositivo, então a corrente também será senoidal. O mesmo pode ser dito sobre a aplicação de uma tensão contínua, que nos dispositivos aqui estudados terá uma corrente também contínua. Caso o estudante deseje aprender sobre circuitos eletrônicos, que são não lineares e, portanto, possuem formas de onda de tensão e de corrente diferentes, deve procurar literatura específica.

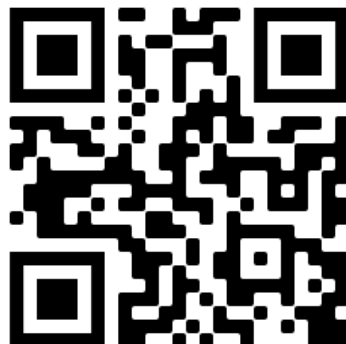
Leia com muita atenção o que é descrito neste parágrafo. No presente livro a única forma de onda alternada tratada será a senoidal e o único sinal contínuo tratado será o constante. Para simplificar as definições, então sempre que ler função contínua entenda como sinônimo de função constante e sempre que ler função alternada entenda como sinônimo de função senoidal.

É comum dizer-se tensão CA (tensão em corrente alternada), mas o que as pessoas querem dizer é na verdade tensão alternada, o mesmo para tensão CC (tensão em corrente contínua) que na verdade

significa tensão contínua: termos como tensão CA ou tensão CC não serão empregados neste livro para não causar confusão, ainda que sejam aceitos e sejam utilizados costumeiramente sem serem considerados erros (os autores do presente livro também os usam no dia a dia).

Videoaula 1.1 (Definições de CC e CA). Para mais informações sobre as definições de valores contínuos e alternados acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/-mT1D1ytq68>



1.3.1 Notação científica

Quando os números são muito grandes ou muito pequenos é comum escrevê-los na forma de notação científica ou potência de 10, cuja forma é:

$$y \times 10^x \quad (1.1)$$

Sendo que:

- y é o *coeficiente*;
- 10 é a *base*;
- x é o *expoente*.

Desta maneira, o número 1 200 pode ser escrito como $1,2 \times 10^3$. Ambas as formas de representação indicam a mesma quantidade, pois:

$$1,2 \times 10^3 = 1,2 \times (1\,000) = 1\,200$$

A mesma situação é válida para o número 0,137, que pode ser escrito como 137×10^{-3} . Deve-se lembrar que 10^{-3} é igual a $1/1\,000$ ou 0,001. Para provar que ambas as representações são idênticas os cálculos são mostrados a seguir:

$$137 \times 10^{-3} = 137 \times (1/1\,000) = 0,137$$

Outro procedimento muito importante é a *mudança de expoente*. O estudante deve ter em mente que:

- Quando o expoente aumenta, a vírgula do coeficiente é deslocada para a esquerda na mesma quantidade de casas decimais que o expoente aumentou;
- Quando o expoente diminui, a vírgula do coeficiente é deslocada para a direita na mesma quantidade de casas decimais que o expoente diminuiu.

O exemplo 1.1 mostra como é feita a mudança de expoente em alguns números.

Exemplo 1.1. Faça as mudanças de expoente solicitadas a seguir:

- (a) Colocar o número $0,234 \times 10^9$ com expoente 6;
- (b) Colocar o número $0,17 \times 10^3$ com expoente 0;
- (c) Colocar o número $0,312 \times 10^{-6}$ com expoente -3 ;
- (d) Colocar o número 15 392 com expoente 4;
- (e) Colocar o número $45\,435,4 \times 10^{-2}$ com expoente 3.

Solução:

- (a) Como se deseja diminuir o expoente de 9 para 6, então a vírgula deve ser deslocada 3 casas decimais para direita. Assim o número $0,234 \times 10^9$ torna-se:

$$234,0 \times 10^6$$

Se após a vírgula há apenas o número zero, então a vírgula não precisa ser escrita e tem-se como resposta:

$$234 \times 10^6$$

- (b) Como se deseja diminuir o expoente de 3 para 0, então a vírgula deve ser deslocada 3 casas decimais para direita. Assim o número $0,17 \times 10^3$ torna-se:

$$170,0 \times 10^0 = 170 \times 10^0$$

Lembrando que qualquer número elevado a zero é igual a um ($10^0 = 1$), assim pode-se dizer que $170,0 \times 10^0 = 170 \times 10^0 = 170$.

- (c) Como se deseja aumentar o expoente de -6 para -3 , então a vírgula deve ser deslocada 3 casas decimais para esquerda. Assim o número $0,312 \times 10^{-6}$ torna-se:

$$0,000312 \times 10^{-3}$$

- (d) O número 15 392 pode ser escrito como $15\,392,0 \times 10^0$, pois $10^0 = 1$. Como se deseja aumentar o expoente de 0 para 4, a vírgula deve ser deslocada 4 casas decimais para a esquerda. Desta maneira, a resposta é:

$$1,5392 \times 10^4$$

- (e) Como se deseja aumentar o expoente de -2 para 3, a vírgula deve ser deslocada 5 casas decimais para a esquerda. Assim o número $45\,435,4 \times 10^{-2}$ torna-se:

$$0,454354 \times 10^3$$

□

Operações com números em notação científica

É importante também que o estudante saiba realizar as quatro operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) com números representados em notação científica. As operações são descritas a seguir:

Soma Só pode ser realizada a soma de números que possuam o mesmo expoente. O procedimento é somar os coeficientes e conservar o expoente, como mostrado a seguir:

$$y_1 \times 10^x + y_2 \times 10^x = (y_1 + y_2) \times 10^x$$

Subtração Só pode ser realizada a subtração entre números que possuam o mesmo expoente. O procedimento é subtrair os coeficientes e conservar o expoente, como mostrado a seguir:

$$y_1 \times 10^x - y_2 \times 10^x = (y_1 - y_2) \times 10^x$$

Multiplicação Pode ser feita com dois números que possuam coeficientes e expoentes distintos. O procedimento é multiplicar os coeficientes e somar os expoentes, como mostrado a seguir:

$$(y_1 \times 10^{x_1}) \times (y_2 \times 10^{x_2}) = (y_1 \times y_2) \times 10^{(x_1+x_2)}$$

Divisão Pode ser feita com dois números que possuam coeficientes e expoentes distintos. O procedimento é dividir os coeficientes e subtrair os expoentes, como mostrado a seguir:

$$\frac{y_1 \times 10^{x_1}}{y_2 \times 10^{x_2}} = \left(\frac{y_1}{y_2} \right) \times 10^{(x_1-x_2)}$$

Exemplo 1.2. Encontre o valor de x nas expressões a seguir:

- (a) $x = 5 \times 10^4 + 530 \times 10^2$
- (b) $x = 3 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-2}$
- (c) $x = (2 \times 10^{-4}) \times (4 \times 10^2)$
- (d) $x = (30 \times 10^5)/(5 \times 10^{-4})$

Solução:

- (a) Para realizar a soma deve-se colocar ambos os números com o mesmo expoente, seja ele qual for. Assim, pode-se modificar ambos os expoentes para 3 ou modificar o primeiro apenas (de 4 para 2). O problema poderia exigir que a resposta fosse dada usando um expoente específico, o que não é o caso. Então pode-se escolher dar a resposta com expoente 4:

$$\begin{aligned} x &= 5 \times 10^4 + 530 \times 10^2 \\ x &= 5 \times 10^4 + 5,3 \times 10^4 \\ x &= (5 + 5,3) \times 10^4 \\ x &= 10,3 \times 10^4 \end{aligned}$$

- (b) Para realizar a subtração deve-se colocar ambos os números com o mesmo expoente. Como não foi solicitado nenhum expoente específico, a resposta pode ser com o expoente -2 :

$$\begin{aligned} x &= 3 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-2} \\ x &= 0,03 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-2} \\ x &= (0,03 - 5) \times 10^{-2} \\ x &= -4,97 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

- (c) A multiplicação é feita multiplicando-se os coeficientes e somando-se os expoentes, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}x &= (2 \times 10^{-4}) \times (4 \times 10^2) \\x &= (2 \times 4) \times 10^{(-4+2)} \\x &= 8 \times 10^{-2}\end{aligned}$$

- (d) A divisão é feita dividindo-se os coeficientes e subtraindo-se os expoentes, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}x &= \frac{30 \times 10^5}{5 \times 10^{-4}} \\x &= \left(\frac{30}{5}\right) \times 10^{[5-(-4)]} \\x &= 6 \times 10^9\end{aligned}$$

□

Outra operação que o estudante pode ser obrigado a utilizar é a potenciação com números em notação exponencial, que é descrita na sequência:

Potenciação Esta é feita empregando a seguinte expressão:

$$(x \times 10^n)^m = x^m \times 10^{(n \times m)} \quad (1.2)$$

A equação (1.2) evidencia que deve-se elevar o coeficiente ao expoente mais externo e multiplicar os expoentes um pelo outro. A aplicação deste conceito é mostrada no exemplo 1.3.

Exemplo 1.3. Calcule o valor de x , dando a resposta com o expoente seis, nas expressões a seguir:

- (a) $x = (5 \times 10^2)^4$;
(b) $x = 400 \times 10^6 + (2 \times 10^3)^3$.

Solução:

- (a) Para encontrar o valor de x , basta elevar o coeficiente a quarta potência e multiplicar os expoentes (2×4) , como é mostrado a seguir:

$$x = 5^4 \times 10^{(2 \times 4)}$$

Isto resulta em:

$$x = 625 \times 10^8$$

Foi solicitado que a resposta fosse dada com expoente seis, portanto a resposta é:

$$x = 62\,500 \times 10^6$$

- (b) Neste item do exemplo, o primeiro termo já está com expoente seis, só falta realizar a potenciação do segundo termo e colocá-lo com expoente seis também. Isto é feito a seguir:

$$x = 400 \times 10^6 + 2^3 \times 10^{(3 \times 3)}$$

Resultando em:

$$x = 400 \times 10^6 + 8 \times 10^9$$

Colocando ambos os termos com expoente seis, tem-se:

$$x = 400 \times 10^6 + 8\,000 \times 10^6$$

Realizando a soma chega-se a resposta final:

$$x = 8\,400 \times 10^6$$

□

Videoaula 1.2 (Cálculos utilizando a potência de 10). Para mais informações sobre como realizar operações matemáticas com expoente na base 10 acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/d6pHML7en1g>



1.4 Múltiplos e submúltiplos

Outra forma de representar números é empregando o conceito de múltiplos e submúltiplos. Basta substituir a base com o expoente pelo seu múltiplo ou submúltiplo correspondente. Os principais múltiplos e submúltiplos são mostrados na tabela 1.2. Note na referida tabela que os multiplicadores (chamados de múltiplos quando o expoente é positivo e submúltiplos quando o expoente é negativo), podem ser representados por prefixos e estes podem ser abreviados. Pode-se escrever que a corrente elétrica tem valor $I = 1\,000\text{ A}$ ou, empregando a notação científica, $I = 1 \times 10^3\text{ A}$. Usando o múltiplo correspondente escreve-se que $I = 1\text{ kA}$ (com o k minúsculo e lê-se um quilo ampère). Outros casos são mostrados no exemplo 1.4.

Tabela 1.2: Múltiplos e submúltiplos.

Multiplicador	Prefixo	Abreviação do prefixo
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	quilo	k
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n

Exemplo 1.4. Nos itens a seguir, faça o que é solicitado.

- Represente o valor 155 kW empregando o múltiplo giga;
- Represente o valor $0,0034\text{ V}$ empregando o submúltiplo mili;
- Represente o valor $2,3\text{ }\mu\text{A}$ como um número convencional (sem usar notação científica);
- Represente o valor $1\,050\,350\text{ }\Omega$ empregando o múltiplo mega.

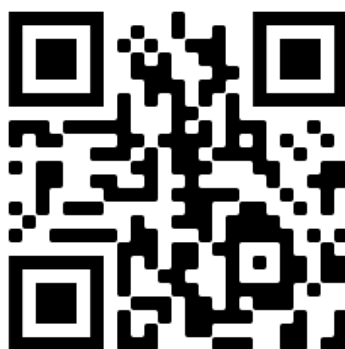
Solução:

- (a) 155 kW é igual a $155 \times 10^3\text{ W}$. O número representado com o expoente 6 (giga) é igual a $0,155 \times 10^6\text{ W}$. A resposta final é, portanto, $0,155\text{ GW}$.
- (b) $0,0034\text{ V}$ representado com o expoente -3 (mili) é igual a $3,4 \times 10^{-3}\text{ V}$. A resposta final é, portanto, $3,4\text{ mV}$. O m do mili é minúsculo e isto deve ser respeitado sempre.
- (c) $2,3\text{ }\mu\text{A}$ é igual a $2,3 \times 10^{-6}\text{ A}$, que também corresponde a $0,0000023\text{ A}$.
- (d) $1\,050\,350\text{ }\Omega$ representado com o expoente 6 (mega) é igual a $1,050350 \times 10^6\text{ }\Omega$. A resposta final é, portanto, $1,050350\text{ M}\Omega$.

□

Videoaula 1.3 (Como utilizar múltiplos e submúltiplos). Para ver um pouco mais sobre como compactar um valor muito grande ou muito pequeno de uma grandeza que tenha unidade de medida utilizando os múltiplos e os submúltiplos acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/aw0o58GwvY>



1.5 Resumo do capítulo

Alguns itens de grande importância são descritos resumidamente a seguir:

- Funções contínuas não possuem alteração de sinal, mesmo que sua forma de onda não seja constante. Funções alternadas são periódicas cujos valores oscilam (ora positivo e ora negativo);
- No presente livro, assim como no dia a dia da maioria dos profissionais de eletricidade, o termo contínuo será usado como sinônimo de constante e alternado como sinônimo de senoidal;
- A notação científica é a representação de valores usando a potência de 10, conforme segue: $y \times 10^x$;
- Pode-se realizar as operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com números escritos em notação científica;
- São utilizadas abreviações dos múltiplos e submúltiplos para diminuir a representação de grandezas de valores muito grandes ou muito pequenos. Estes múltiplos e submúltiplos são amplamente utilizados nos textos técnicos e nos diálogos entre profissionais. Você vai falar muito sobre correntes de mili ampères ou de quilo ampères quando estiver trabalhando.

Problemas propostos

Problema 1.1. Encontre o valor de x nas expressões a seguir. Coloque as respostas com o expoente do número na notação científica indicada.

(a) $x = 0,0005 \times 10^7 + 10\,000 \times 10^{-4}$, a resposta deve estar com o expoente 3, ou seja, $Y \times 10^3$;

(b) $x = 5\,000 \times 10^3 - 10\,000\,000 \times 10^{-1}$, a resposta deve estar com o expoente 6;

(c) $x = 12 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^{-3}$, a resposta deve estar com o expoente -6 ;

(d) $x = \frac{12 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-3}}$, a resposta deve estar com o expoente 0;

(e) $x = \frac{10 \times 10^2}{2 \times 10^2}$, a resposta deve estar com o expoente 0;

(f) $x = \frac{12 \times 10^4 + 80 \times 10^3}{20 \times 10^4}$, a resposta deve estar com o expoente 0;

(g) $x = 30 \times 10^8 + 30\,000 \times 10^5 - 0,0003 \times 10^{13}$, a resposta deve estar com o expoente 9;

(h) $x = 0,5 \times 10^3 + 50 \times 10^2 \times 1\,000 \times 10^{-3}$, a resposta deve estar com o expoente 3;

(i) $x = (3 \times 10^3)^4 - (5 \times 10^2)^5$, a resposta deve estar com o expoente 12.

Problema 1.2. Nos itens a seguir, faça o que é solicitado.

(a) Represente o valor 20 A empregando o múltiplo quilo;

(b) Represente o valor 23 mV empregando o submúltiplo micro;

(c) Represente o valor 100 MW empregando o múltiplo giga;

(d) Represente o valor 1 000 mΩ empregando o múltiplo quilo;

(e) Represente o valor 2 342 nF empregando o submúltiplo mili.

Parte I

Circuitos elétricos com tensões e correntes contínuas

Capítulo 2

Fundamentos de eletricidade

2.1 Introdução

O presente capítulo inicia discutindo sobre o fenômeno da resistência à passagem de corrente elétrica em dispositivos. A discussão é feita sob os pontos de vista microscópio e macroscópio. Do ponto de vista macroscópio é possível realizar medições das grandezas tensão e corrente e, via a lei de Ohm, determinar o quanto um dispositivo é mais ou menos permissivo à passagem de corrente elétrica. As equações de potência em dispositivos resistivos também são apresentadas, assim como a mudança do valor da resistência pelo aquecimento, que pode ser causado pela própria dissipação de calor resultante da passagem de corrente ou por fonte de calor externa.

2.2 Estrutura atômica da matéria

O modelo de estrutura do átomo descrito nesta seção é muito simplificado, não servindo para análise detalhada de muitos fenômenos elétricos conhecidos. Porém, o modelo simplificado aqui utilizado permite compreender de forma satisfatória os fenômenos descritos no decorrer deste livro. Será considerado, portanto, que o átomo pode ser representado por um núcleo e pela eletrosfera, que são mostrados na figura 2.1 e descritos como:

Núcleo Região na qual encontram-se os *prótons*, que são partículas que possuem *carga elétrica positiva*, e os *nêutrons*, cujas *cargas são neutras* (nem positivas e nem negativas);

Eletrosfera Região na qual encontram-se os *elétrons*, que são partículas que possuem *carga elétrica negativa*. A eletrosfera é a região no entorno do núcleo e na qual os elétrons movimentam-se. Cada elemento químico tem certo número de camadas na eletrosfera, porém na figura 2.1 é feita a representação de um átomo de Hélio (He), que possui apenas uma única camada na qual os seus dois elétrons se movimentam. O caminho no qual o elétron movimenta-se é chamado de *órbita do elétron* e também é destacado na figura 2.1.

É sabido que as cargas opostas se atraem e que esta força de atração aumenta se as cargas opostas ficam mais próximas uma da outra. Se as forças de atração entre os elétrons e prótons são mais intensas quando as distâncias entre eles diminuem, então quanto mais próximos estiverem a órbita e o núcleo, maior será a força de atração. Desta maneira, é mais “fácil” retirar de um átomo um elétron que circula em uma órbita mais distante do núcleo do que um que circule numa órbita mais próxima do mesmo núcleo. A palavra “fácil” é utilizada para expressar um menor gasto de energia para retirar um elétron mais distante do núcleo do que um mais próximo. Então tenha em mente que um material bom condutor deve ser aquele que tem como característica ter elétrons “facilmente” retirados do seu átomo para que possam circular.

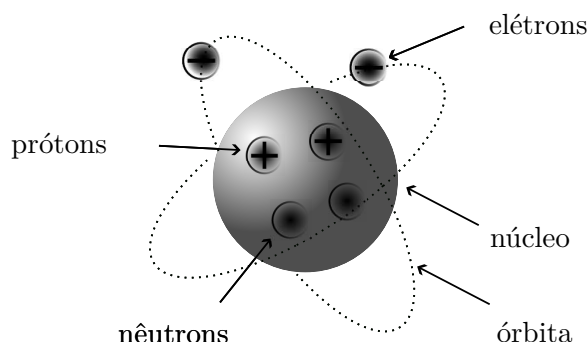


Figura 2.1: Ilustração simplificada da estrutura do átomo de Hélio.

2.3 Tensão (d.d.p.) e corrente elétrica

Uma grandeza elétrica que necessita ser definida para que se possa avançar nos estudos sobre eletricidade é a *carga elétrica*, a qual é uma medida de quantidade de elétrons. Define-se uma quantidade de $1,6 \times 10^{19}$ elétrons como sendo igual a uma carga elétrica de 1 coulomb ou, usando a simbologia, 1 C.

Suponha-se que um fio de área da seção transversal circular, como mostrado na figura 2.2, e que pode-se medir a quantidade de elétrons que atravessa esta seção transversal circular em certo tempo. Se há fluxo de elétrons pela área da seção transversal, então diz-se que há corrente elétrica, simbolizada pela letra I . A quantidade de carga elétrica dividida pelo tempo é chamada intensidade da corrente elétrica, que matematicamente pode ser escrita como:

$$I = \frac{Q}{\Delta t} \quad (2.1)$$

Sendo Q a quantidade de carga elétrica e Δt o intervalo de tempo em que foi medido o fluxo de elétrons. Na universidade usamos a simbologia $I = dQ/dt$, mas para este livro não trataremos de taxas de variação complexas a ponto de precisarmos do cálculo diferencial. Obviamente, se todos os elétrons estão parados, a intensidade da corrente elétrica é nula (zero). Neste caso pode-se dizer também que não há corrente elétrica circulando no fio. Se a quantidade de carga é medida em coulomb (C) e o intervalo de tempo em segundos (s), então tem-se que a corrente elétrica é dada em ampères, unidade que é representada pela letra A. Ainda é necessário salientar que:

1. A corrente elétrica tem, além da intensidade, um sentido;
2. O sentido da corrente elétrica é convencionado como sendo o sentido oposto ao movimento dos elétrons ou no mesmo sentido dos portadores de carga positivos¹. Na figura 2.2 fica claro que o sentido da corrente elétrica é o contrário do sentido dos elétrons, pois vê-se que a indicação de movimento dos elétrons “saltando” para o átomo vizinho à direita, enquanto que a indicação da corrente elétrica I é mostrada com uma seta para a esquerda. O motivo desta opção é pelo fato de que os elétrons têm carga negativa e se a corrente elétrica fosse medida no mesmo sentido dos elétrons seria também negativa. Como os prótons não se movimentam, pois ficam fixos no núcleo, foi definida a corrente elétrica em sentido oposto ao movimento dos elétrons, assim o valor obtido é positivo.

¹Íons são exemplos de portadores de cargas positivos, mas este nível de detalhe não é objeto de estudo do presente livro já que os íons surgem em situações particulares.

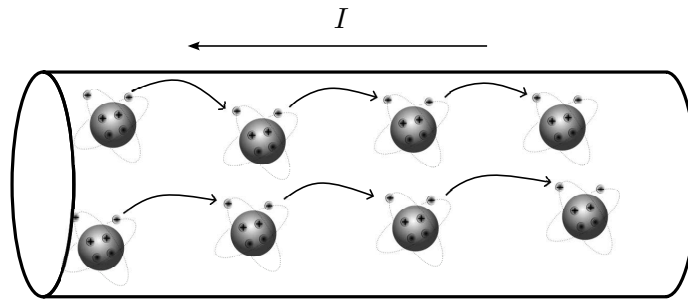


Figura 2.2: Elétrons movimentam-se “saltando” de um átomo a outro.

Exemplo 2.1. Calcule o valor da corrente elétrica que atravessa certo fio, sabendo que em sua seção transversal passa uma carga de 32 C em 8 s.

Solução:

Empregando diretamente a equação (2.1) encontra-se o valor da corrente elétrica que atravessa este fio. Tem-se então que em um intervalo de tempo $\Delta t = 8\text{ s}$ uma carga Q de valor 32 C percorre o fio, então:

$$I = \frac{32}{8}$$

$$I = 4\text{ A}$$

A corrente elétrica quantifica o fluxo de cargas elétricas que atravessam uma seção transversal de um fio ou um outro meio em 1 s. Neste livro é dada ênfase nos cálculos de valores de corrente elétrica, ainda que seja importante entender o conceito de cargas elétricas para que fiquem claros vários outros conceitos apresentados.

□

Para que haja corrente elétrica em um dispositivo elétrico, é aplicada uma tensão (também chamada de diferença de potencial ou d.d.p.) em seus terminais; ver figura 2.3, na qual é representada uma fonte de tensão e suas polaridades (positiva e negativa). A tensão é uma medida da quantidade de energia necessária para que se crie a corrente elétrica desejada em um dispositivo. É chamada de *fonte de tensão ideal* (observe como ela é representada na 2.3) o dispositivo em que a tensão é constante em seus terminais independentemente da potência elétrica que ele forneça ou da corrente que por ela circule. A grandeza elétrica tensão será representada neste livro pela letra U e a unidade da tensão é o volt, representada pela letra V. Portanto, no decorrer deste livro o estudante lerá frases como: um dispositivo tem em seus terminais uma tensão $U = 10\text{ V}$ e é atravessado por uma corrente elétrica de intensidade $I = 5\text{ A}$. Deve ficar claro que a letra U indica a grandeza elétrica tensão e a letra V indica a unidade volt, assim como a letra I indica a grandeza corrente elétrica e a letra A indica a unidade ampère.

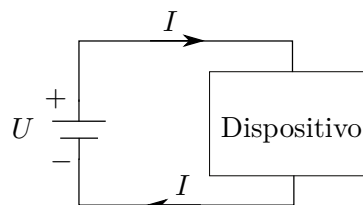


Figura 2.3: Fonte de tensão alimentando um dispositivo elétrico.

Uma analogia pode ser feita em relação ao fluxo d'água e a corrente elétrica, assim como outra pode ser feita em relação a uma bomba hidráulica e uma fonte de tensão. O fluxo normal da água se

dá como na figura 2.4(a), de uma altura maior para uma menor, isto devido à gravidade. Para fazer o fluxo de água seguir de uma altura menor para uma maior deve-se fornecer energia, no caso uma bomba hidráulica faz isto, como mostrado na figura 2.4(b). Quanto maior for o fluxo de água, mais energia terá de ser fornecida pela bomba hidráulica; efeito similar acontece em um circuito elétrico. Se não há nenhuma fonte de energia, os elétrons não se movimentam. Quando uma fonte de tensão é ligada no circuito, então a energia é fornecida e os elétrons se movimentam levando consigo energia para realização de alguma tarefa (movimentar ou aquecer algo, por exemplo) nos dispositivos. Assim como a água empurrada pela bomba hidráulica percorre um tubo, os elétrons impulsionados pela fonte de tensão se movimentarão pelos fios até o dispositivo.

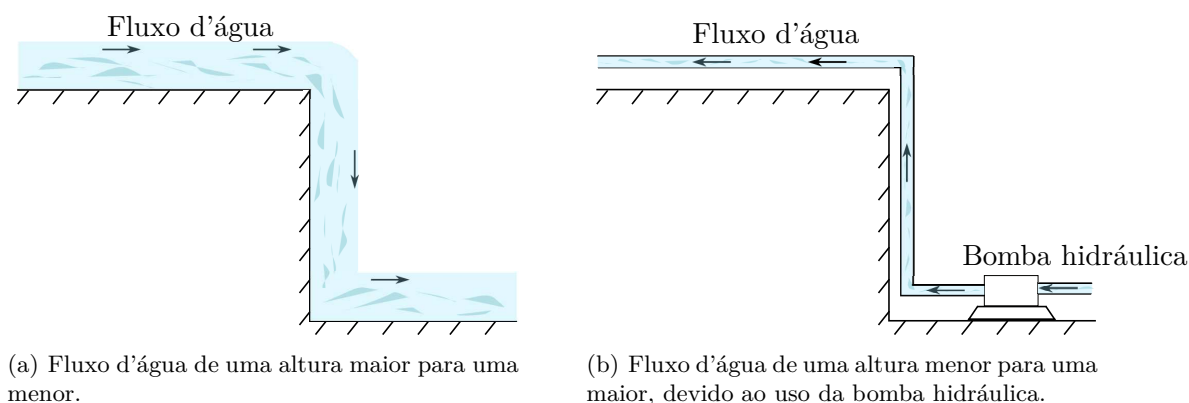


Figura 2.4: Fluxo de água utilizado para entendimento dos conceitos de tensão e corrente elétrica.

Videoaula 2.1 (Sobre definições de tensão e corrente). Para mais informações sobre os conceitos de tensão (ddp) e corrente elétrica acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/t7xpkXybvSU>



2.4 Materiais condutores, isolantes e semicondutores

Deve-se lembrar que a corrente elétrica é definida como sendo o fluxo ordenado de elétrons através de um meio e que uma fonte de tensão pode fornecer energia para a movimentação destes elétrons para que seja possível que um dispositivo transforme a energia elétrica em movimento ou calor, por

exemplo.

Os fios são, portanto, um elemento importante do circuito elétrico e são feitos de materiais cuja estrutura atômica permite que os elétrons sejam facilmente retirados da sua última camada, ou, dizendo de outra forma, os fios são feitos de materiais que conduzem a corrente elétrica facilmente. Há também os materiais cuja estrutura atômica dificultam a retirada de um elétron do átomo, ou seja, dificultam a circulação de corrente elétrica. Quanto ao grau de dificuldade da circulação da corrente elétrica em certo tipo de material, pode-se dizer que há três classificações, descritas a seguir:

Condutores São os materiais que oferecem facilidade à circulação de corrente elétrica. Pode-se dizer também que os materiais elétricos condutores são aqueles que não oferecem muita resistência à circulação de corrente elétrica;

Isolantes São os materiais que oferecem dificuldade à circulação de corrente elétrica. Pode-se dizer também que os materiais elétricos isolantes são aqueles que oferecem muita resistência à circulação de corrente elétrica;

Semicondutores São os materiais elétricos que se comportam em algumas situações como condutores e em outras como isolantes.

Define-se como *fio ideal* aquele fio que não impõe qualquer dificuldade à passagem de corrente elétrica ou, dizendo de outra forma, que o fio ideal é aquele cuja resistência à passagem de corrente elétrica é nula. Na seção 2.7 são mostrados mais detalhes sobre materiais condutores e isolantes.

2.5 Resistência e condutância elétricas

Resistência elétrica ou simplesmente *resistência* é a grandeza elétrica que permite mensurar quanto um meio se opõe à passagem de corrente elétrica. Quanto maior for a resistência, maior será dificuldade de haver movimentação de elétrons e, inversamente, quanto menor for a resistência maior será a facilidade de haver movimentação de elétrons.

A resistência é representada pela letra R e seu valor é dado pela *lei de Ohm* (em homenagem ao seu autor, de mesmo nome). Matematicamente a lei de Ohm é escrita como:

$$R = \frac{U}{I} \quad (2.2)$$

A figura 2.5(a) mostra a ilustração de uma resistência em um circuito elétrico na qual tem-se que U é a tensão da fonte e também dos terminais da resistência e I a corrente elétrica que a atravessa. A unidade da resistência é o ohm, cujo símbolo é Ω .

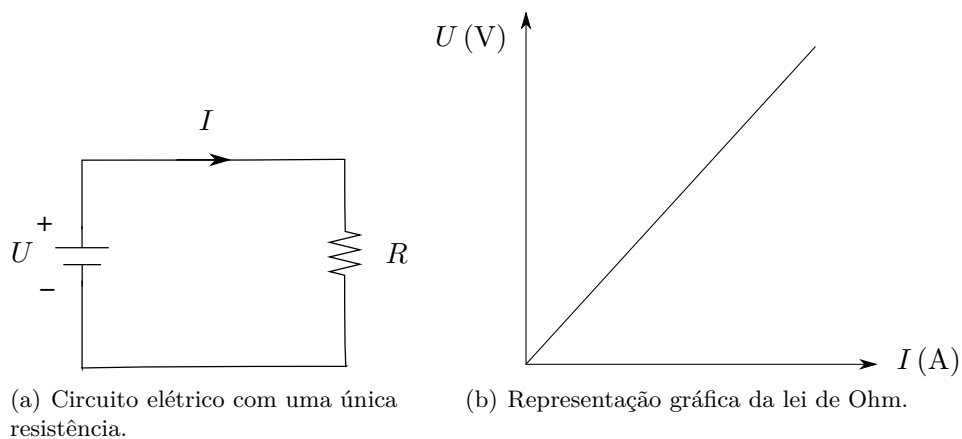


Figura 2.5: Resistência alimentada por uma fonte de tensão.

Outra forma muito comum de se expressar a lei de Ohm é isolando a tensão, o que permite escrever:

$$U = RI \quad (2.3)$$

As expressões das equações (2.2) e (2.3) representam o mesmo fenômeno, só estão escritas de forma diferente. A lei de Ohm pode ser comprovada experimentalmente com o seguinte procedimento:

1. Coloca-se um valor baixo de tensão nos terminais de um resistor (dispositivo que possui uma certa resistência) e anota-se o valor de corrente elétrica que percorre o mesmo;
2. Aumenta-se em pequenos intervalos o valor da tensão aplicada e anota-se cada valor de corrente elétrica correspondente;
3. Traça-se o gráfico dos valores de tensão pelos respectivos valores de corrente elétrica.

Percebe-se então que o gráfico resultante será uma reta, como a mostrada na figura 2.5(b). Isto evidencia que a relação entre as variáveis tensão e corrente é linear. Portanto, a resistência, representada pela letra R , é constante.

Exemplo 2.2. Um dispositivo elétrico é conectado pelos seus terminais a uma fonte de tensão de 127 V. Calcule o valor da corrente elétrica que o atravessa, sabendo que o dispositivo pode ser representado por uma resistência de $10\ \Omega$.

Solução:

Como são conhecidos os valores da tensão nos terminais do dispositivo e o valor da resistência que o representa, pode-se usar a equação (2.3) para encontrar a corrente elétrica:

$$\begin{aligned} U &= RI \\ I &= \frac{U}{R} \\ I &= \frac{127}{10} \\ I &= 12,7\text{ A} \end{aligned}$$

□

Outra grandeza elétrica que permite aos profissionais da eletricidade saber sobre a resistividade de um material é a chamada *condutância*, representada pela letra G . Ela é o inverso da resistência, ou seja:

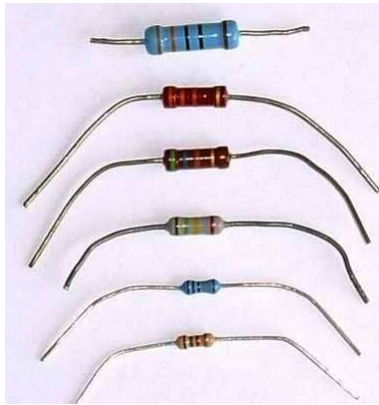
$$G = \frac{1}{R} \quad (2.4)$$

A unidade de condutância é o siemens, representado de maneira mais compacta pela letra S. Assim, enquanto um valor elevado de resistência representa um alto grau de dificuldade à circulação da corrente elétrica, um valor elevado de condutância representa um alto grau de facilidade à circulação de corrente elétrica.

2.6 Resistor

Resistência é uma grandeza elétrica e pode representar dispositivos elétricos como, por exemplo, um fio, entre outros. Há um dispositivo elétrico em especial que é muito utilizado, que é chamado de *resistor*: alguns modelos são mostrados na figura 2.6. Os da figura 2.6(a) são pequenos e utilizados em circuitos eletrônicos que demandam frações ou algumas unidades de watts e os da figura 2.6(b) são bem maiores e utilizados em circuitos elétricos de maior porte, que demandam potências de centenas ou milhares de watts.

O resistor é feito de material condutor e é utilizado em circuitos eletrônicos para alterar valores de tensão ou de corrente elétrica e na indústria é utilizado, por exemplo, para diminuir o valor da corrente



(a) Resistor para circuitos eletrônicos. O menor deles tem em torno de 5 mm.



(b) Resistor para circuitos de elevada potência. Possuem em torno de 30 cm de comprimento e são cilindros ocos para facilitar a circulação de ar e evitar aquecimento excessivo.

Figura 2.6: Fotos de alguns tipos de resistores.

elétrica num curto circuito, simular uma carga durante testes, entre outras aplicações. Conforme é detalhado na seção 2.10.1, a circulação de corrente elétrica faz com que o meio no qual ela está passando se aqueça e por isso são empregados também para aquecer água, por exemplo. Os chuveiros elétricos operam baseados neste princípio, pois o resistor se aquece, a água flui por ele e retira calor do mesmo: esta água é despejada no banheiro a uma temperatura maior do que a que entrou no chuveiro. Saliente-se que o resistor não fica conectado o tempo todo, pois apenas quando a água flui é que o circuito é fechado de forma automática. Se o fluxo de água é cortado e a corrente elétrica continua a fluir pelo resistor, então ele se aquecerá em demasia e pode romper parte de sua estrutura pelo excesso de calor: quando isto ocorre comumente é dito que o chuveiro queimou, porém pode ser restaurado trocando o resistor danificado por um novo.

Saliente-se a diferença entre resistência e resistor. Resistência é uma grandeza elétrica, enquanto resistor é um dispositivo. A resistência pode representar os resistores, os fios ou mesmo uma instalação elétrica inteira: pode-se dizer que a resistência representa a transformação de energia elétrica noutra forma qualquer, ainda que nos estudos iniciais de eletricidade o habitual é praticar a transformação *energia elétrica* $\Rightarrow$ *energia térmica*. A rigor deve-se dizer uma frase como, por exemplo, “o valor da resistência de um resistor é igual a $10\,\Omega$ ”, porém, é comum se dizer: “um resistor de $10\,\Omega$ ”. Ambas as formas são compreensíveis e aceitáveis. Apesar de habitualmente se dizer que “a resistência do chuveiro queimou”, isto está errado, pois o dispositivo físico que foi danificado é o resistor. Não perca seu tempo instruindo o vendedor da loja de materiais elétricos e peça “uma resistência nova para chuveiro” para evitar conversar demais, ainda que você saiba que esta é a forma errada de se expressar.

O resistor cujo valor é constante, independentemente da tensão nos seus terminais e da corrente elétrica que o atravesse é chamado de *resistor ôhmico*.

Exemplo 2.3. Um técnico de laboratório submeteu os terminais de um resistor R às tensões apresentadas na tabela 2.1. Para cada valor de d.d.p. ele mediu a intensidade da corrente elétrica que percorria o resistor R e estes dados também se encontram na tabela 2.1. Calcule o valor de R utilizando a lei de Ohm.

Tabela 2.1: Valores de tensão e corrente elétrica medidas no experimento descrito no exemplo 2.1.

Tensão (V)	Corrente elétrica (A)
10	4,9
15	7,4
20	10,1

Solução:

O valor de R pode ser encontrado utilizando qualquer um dos três pares ordenados d.d.p. *versus* corrente elétrica (U, I). Porém, serão utilizados os três pares para comparação.

Empregando o primeiro par ordenado, encontra-se:

$$R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{10}{4,9} = 2,04 \Omega$$

Empregando o segundo par ordenado, encontra-se:

$$R = \frac{U_2}{I_2} = \frac{15}{7,4} = 2,03 \Omega$$

Empregando o terceiro par ordenado, encontra-se:

$$R = \frac{U_3}{I_3} = \frac{20}{10,1} = 1,98 \Omega$$

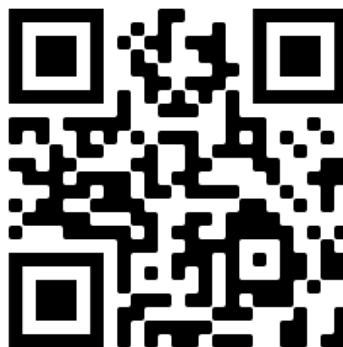
Percebe-se que os três valores encontrados são muito próximos. Em condições ideais eles seriam iguais. Porém, mesmo em um laboratório com bons instrumentos há alguma imprecisão nas medidas. Para se determinar um valor único pode-se calcular a média aritmética dos três valores encontrados, como feito a seguir:

$$R = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} = \frac{6,05}{3} = 2,02 \Omega$$

□

Videoaula 2.2 (Sobre a lei de Ohm). Para mais informações sobre as relações entre tensão, corrente e resistência acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/DwW9VQb05Dc>



2.7 Cálculo do valor da resistência

A resistência R de certo fio pode ser calculada a partir do seu *comprimento* (denotado pela letra l), *área da seção transversal* (denotado pela letra A) e da *resistividade elétrica*, ou simplesmente *resistividade*, do material que o fio é composto. O símbolo que representa resistividade é o ρ (lê-se “rô”). A resistência de um fio é dada por:

$$R = \frac{\rho l}{A} \quad (2.5)$$

As unidades no sistema internacional são: l em m, A em m^2 e ρ em $\Omega \times \text{m}$. Entretanto, os fios são identificados nas normas brasileiras usando a área em mm^2 e é esta última unidade que é utilizada no decorrer deste livro. É muito comum ver pessoas cometendo o erro de dizerem que desejam comprar um cabo de 4 mm, quando na verdade deveriam dizer que desejam um cabo de 4 mm^2 , pois estão especificando a área da seção transversal, que é um dos parâmetros que define a quantidade de corrente suportável pelo cabo: não cometa este erro! As unidades neste novo contexto tornam-se:

- l em m;
- A em mm^2 ;
- ρ em $\Omega \times \text{mm}^2/\text{m}$.

2.7.1 Resistividade

A resistividade é uma grandeza importante na seleção do material a ser utilizado para construir qualquer dispositivo elétrico e é uma característica intrínseca de cada material, servindo como critério para que se saiba se certo material é condutor ou isolante. Lembre-se que na seção 2.4 foi dito que o material condutor possui elétrons livres e são facilmente retirados do seu átomo quando é aplicada uma d.d.p., enquanto que os materiais isolantes não possuem elétrons livres e que para retirá-los do seu átomo é necessário aplicar uma d.d.p. muito elevada.

Para que a análise da característica condutora de um material não seja feita levando em conta a sua estrutura atômica foi criado o conceito de resistividade, que define os materiais condutores e isolantes de maneira mais simples. Assim, se a resistividade for elevada é difícil tirar os elétrons do seu átomo, mas se a resistividade for baixa é relativamente fácil tirá-los do seu átomo.

O valor da resistividade de materiais condutores (como o cobre, o ouro, a prata e o alumínio) e isolantes (como a EBONITE, que é um tipo de borracha, e o vidro) são postos na tabela 2.2. Note que os materiais isolantes possuem resistividades significativamente maiores que os materiais condutores.

Tabela 2.2: Materiais e seus valores de resistividade.

Material	ρ a 20°C ($\Omega \times \text{mm}^2/\text{m}$)
Cobre	0,0172
Alumínio	0,0282
Prata	0,0159
Ouro	0,0244
Ferro	0,01
Carbono	≈ 35
Vidro	10^{16} a 10^{20}
EBONITE	$\approx 10^{19}$

O estudante deve perceber a diferença entre resistência e resistividade. Esta última é uma característica intrínseca do material e serve para se avaliar se é melhor utilizá-lo para construir um meio

condutor ou isolante, enquanto que a resistência é a propriedade que um dispositivo elétrico qualquer tem em se opor a passagem de corrente elétrica e seu valor depende não somente da resistividade do material do qual o fio é construído, mas também do seu comprimento e da sua área, como fica evidente na equação (2.5). Desta maneira, dois fios de mesmo comprimento e área, porém feitos com materiais diferentes (por exemplo, um de alumínio e outro de cobre) terão resistências diferentes, pois o alumínio e o cobre possuem resistividades diferentes.

Exemplo 2.4. Calcule:

- (a) O valor da resistência de um fio de ouro de 3 m de comprimento e de área da seção reta de 2 mm^2 ;
- (b) Se este fio fosse feito de cobre qual seria o valor da resistência dele?

Solução:

- (a) O uso da equação (2.5) permitir calcular o valor da resistência do fio diretamente, pois todos os valores necessários são conhecidos: $l = 3 \text{ m}$, $A = 2 \text{ mm}^2$ e $\rho = 0,0244 \Omega \times \text{mm}^2/\text{m}$ (valor encontrado da tabela 2.2). A resistência R do fio é:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho l}{A} \\ R &= \frac{0,0244 \times 3}{2} \\ R &= \frac{0,0732}{2} \\ R &= 0,0366 \Omega \\ R &= 36,6 \text{ m}\Omega \end{aligned}$$

- (b) Se este fio fosse feito de cobre então o valor da resistividade seria diferente. Consultando a tabela 2.2 encontra-se que $\rho = 0,0172 \Omega \times \text{mm}^2/\text{m}$. Assim encontra-se:

$$\begin{aligned} R &= \frac{0,0172 \times 3}{2} \\ R &= \frac{0,0516}{2} \\ R &= 0,0258 \Omega \\ R &= 25,8 \text{ m}\Omega \end{aligned}$$

Como o cobre é melhor condutor (possui menor resistividade) que o ouro, então um fio de mesmo comprimento e mesma área possui resistência menor que um de ouro.

Se você comprar equipamentos de áudio muito caros, verá que muitos possuem seus terminais elétricos de ouro, que é um material significativamente mais caro que o cobre: mas por que utilizar o ouro se o cobre é melhor condutor? É que o cobre oxida mais rapidamente que o ouro e isto piora a condução elétrica. Para garantir a qualidade dos contatos por maior tempo, se utiliza esta cobertura de ouro nos terminais elétricos (diz-se que os terminais são banhados a ouro) de equipamentos mais caros e sofisticados. O exemplo dado, de um fio de 3 m, é puramente ilustrativo, pois um fio de ouro desse tamanho não é economicamente viável.

□

Exemplo 2.5. Um fio possui resistência de $0,3 \Omega$. Sabendo que ele é feito de cobre e que a área da seção reta é de 8 mm^2 , calcule o seu comprimento.

Solução:

Seção reta é a mesma coisa que seção transversal. A resistência do fio é de $0,3\,\Omega$, ou seja, $R = 0,3\,\Omega$. O cobre tem resistividade de $0,0172\,\Omega \times \text{mm}^2/\text{m}$ (ver tabela 2.2), então o valor da comprimento do fio pode ser encontrado usando a equação (2.5). Tem-se assim que:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho l}{A} \\ l &= \frac{R \times A}{\rho} \\ l &= \frac{0,3 \times 8}{0,0172} \\ l &= \frac{2,4}{0,0172} \\ l &= 139,53\text{ m} \end{aligned}$$

O comprimento é enorme (maior que 100 m). Quando fazemos projetos elétricos não nos preocupamos somente com o valor da resistência do fio, pois a queda de tensão ou d.d.p nele pode ser significativa. O condutor ideal de resistência nula e, portanto, de queda de tensão nula, não existe. Quando você estudar como fazer projetos elétricos verá técnicas de seleção do melhor condutor para alimentação dos dispositivos de uma instalação e o comprimento deste condutor será levado em consideração. Isto não é tratado no presente livro.

□

Exemplo 2.6. Um técnico encontrou um pedaço de um material desconhecido. Ele possui a área da seção reta de 32 mm^2 , comprimento de $0,1\text{ m}$ e resistência de $100\,\Omega$. Qual o valor da resistividade do material?

Solução:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho l}{A} \\ \rho &= \frac{RA}{l} \\ \rho &= \frac{100 \times 32}{0,1} \\ \rho &= 32\,000\,\Omega \times \text{mm}^2/\text{m} \end{aligned}$$

Note que pelo alto valor da resistividade, o material não é apropriado para conduzir corrente elétrica e deve ser empregado para construção de algum isolador elétrico. Os isoladores elétricos chamados buchas isoladoras (ver três delas no transformador mostrado na figura 2.7) podem ser vistos nos postes e são feitos de material cerâmico. O estudante estudará este equipamento se cursar disciplinas de tecnologia de equipamentos elétricos ou de manutenção elétrica.

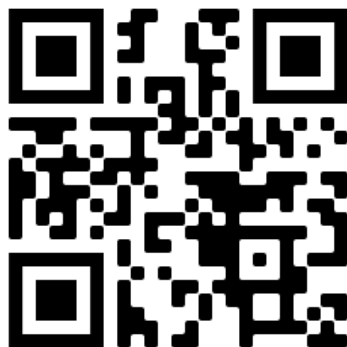
□



Figura 2.7: Foto de um transformador que possui três isoladores de cerâmica do tipo bucha; estas estão instaladas na parte de cima.

Videoaula 2.3 (Resistividade dos materiais e a resistência de dispositivos). Para mais conteúdo sobre a resistividade acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/Sg7CJPw5R-U>



2.8 Resistência variando com a temperatura

O resistor ôhmico tem como característica o fato de possuir o valor de sua resistência constante, ainda que a intensidade da corrente elétrica que o atravesse seja alterada. Na realidade o aumento no valor da corrente elétrica intensifica o *efeito Joule*, que é o nome dado à criação de calor criada pela circulação da corrente em um material resistivo. Ao se aquecerem, os resistores passam a ter seus elétrons de sua estrutura movimentado-se de maneira mais desordenada e isto pode ser interpretado como o aumento do valor da resistência, já que uma menor quantidade de elétrons se deslocará no sentido da corrente elétrica (haverá mais movimento lateral com o aumento da desordem). Assim,

pode-se dizer que ao se aquecer significativamente um resistor, a sua resistência aumenta².

A variação da resistência com a temperatura depende do tipo de material do qual um resistor é feito. Em geral, são preferíveis os materiais cuja resistência varia pouco com o aumento de temperatura na construção de resistores, porém, pode-se utilizar a relação entre o valor da resistência e a temperatura para se construir dispositivos de outros tipos, como, por exemplo, os varistores³.

O resistor que varia o seu valor com a temperatura e, portanto, com a corrente elétrica (já que a circulação dos elétrons aquece o resistor) é chamado de *resistor não ôhmico*.

A expressão que permite calcular a resistência em temperaturas diversas é:

$$R_T = R_{20} + R_{20} \times \alpha \times \Delta T \quad (2.6)$$

Sendo:

- R_T é o valor da resistência a uma temperatura T ;
- R_{20} é o valor da resistência a uma temperatura de 20°C . Este valor é um valor de referência, desta maneira, os fabricantes informam o valor da resistência para 20°C ;
- α é o coeficiente de temperatura do material. Quanto maior o valor de α maior é a elevação da resistência com o aumento da temperatura. A tabela 2.3 fornece os valores do coeficiente de temperatura para vários materiais. A unidade do coeficiente de temperatura é $1/^\circ\text{C}$;
- $\Delta T = T - 20^\circ\text{C}$ indica a variação de temperatura em relação a temperatura de referência, que é 20°C .

Tabela 2.3: Materiais e seus coeficientes de temperatura.

Material	α ($1/^\circ\text{C}$)
Cobre	0,0039
Alumínio	0,0039
Prata	0,0038
Ouro	0,0034
Carbono	$\approx -0,0005$

Exemplo 2.7. Um resistor é feito de cobre e a temperatura de 20°C a sua resistência é de $1\text{ k}\Omega$. Ele aqueceu devido à passagem de corrente elétrica (efeito Joule) e sua temperatura elevou-se para 40°C . Qual é o valor da resistência deste resistor nesta nova temperatura?

Solução:

Interpretando o enunciado e organizando os dados fornecidos pode-se escrever:

- $R_{20} = 1\text{ k}\Omega = 1\,000\,\Omega$;
- $T = 40^\circ\text{C}$;
- $\alpha = 0,0039\,1/^\circ\text{C}$ (o valor do coeficiente de temperatura do cobre foi obtido na tabela 2.3).

²Boa parte dos materiais condutores de fato têm seu valor de resistência elevado com o aquecimento, porém há materiais semicondutores cuja resistência diminui com o aumento da temperatura. Neste livro, não é tratada da teoria de materiais semicondutores. Verifique o valor do coeficiente de temperatura (parâmetro que será descrito na sequência do texto) para saber se ele eleva o valor da resistência ou não. Se o coeficiente for negativo, então o aumento na temperatura na verdade diminui o valor da resistência.

³Você pode fazer uma busca na *Internet* e encontrará facilmente a definição de varistor, assim como suas aplicações. Adianto que quando a tensão no varistor se eleva de forma perigosa, sua resistência diminui e isto é utilizado para desviar a corrente do circuito principal.

Usando a equação (2.6) (lembre-se que $\Delta T = T - 20^\circ\text{C}$) e substituindo os valores, encontra-se:

$$\begin{aligned} R_T &= R_{20} + R_{20} \times \alpha \times \Delta T \\ R_{40} &= 1\,000 + [1\,000 \times 0,0039 \times (40 - 20)] \\ R_{40} &= 1\,000 + 3,9 \times 20 \\ R_{40} &= 1\,000 + 78 \\ R_{40} &= 1\,078\,\Omega \\ R_{40} &= 1,078\,\text{k}\Omega \end{aligned}$$

Note que com um aumento de 20°C houve um aumento de apenas $0,0078\%$ no valor da resistência. Grande parte dos resistores são construídos com materiais cuja variação da resistência com a temperatura é insignificante e, por isso, podem ser considerados para fins práticos como sendo resistores ôhmicos.

□

Exemplo 2.8. Na falta de um termômetro para medir a temperatura ambiente de certo local de uma indústria, um técnico utilizou o seguinte artifício: pegou um resistor feito de prata, colocou-o no local que desejava conhecer a temperatura e depois de alguns minutos mediu a resistência deste resistor. Obviamente se a temperatura varia, então a resistência deste resistor também se altera. A 20°C a resistência do resistor de prata vale $500\,\Omega$, depois de ser colocado no local em que desejava medir a temperatura ambiente, o técnico mediu um valor de resistência de $540\,\Omega$. Qual é o valor da temperatura ambiente?

Solução:

Interpretando o enunciado e organizando os dados fornecidos, pode-se escrever:

- $R_{20} = 500\,\Omega$;
- $T = ?$ É a variável que deseja-se descobrir o valor;
- $R_T = 540\,\Omega$;
- $\alpha = 0,0038\,1/^\circ\text{C}$ (o valor do coeficiente de temperatura do cobre foi obtido da tabela 2.3);

Usando a equação (2.6) e substituindo os valores encontra-se a variação da temperatura:

$$\begin{aligned} R_T &= R_{20} + R_{20} \times \alpha \times \Delta T \\ 540 &= 500 + [500 \times 0,0038 \times \Delta T] \\ 540 - 500 &= 1,9 \times \Delta T \\ 40 &= 1,9 \times \Delta T \\ \Delta T &= \frac{40}{1,9} \\ \Delta T &= 21,05^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Lembre-se que ΔT é a variação da temperatura em relação a temperatura de referência 20°C , ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T - 20 \\ T &= \Delta T + 20 \\ T &= 21,05 + 20 \\ T &= 41,05^\circ\text{C} \end{aligned}$$

A temperatura no local onde o resistor de prata foi utilizado é $41,05^\circ\text{C}$

□

2.9 Reostato

Foi mostrado anteriormente que a resistência de um resistor varia de acordo com a temperatura. Também foi discutido que quando se projeta um resistor, deve-se levar em consideração:

- As suas dimensões (comprimento e área da seção transversal) e;
- O material utilizado na construção.

A maioria das aplicações exige resistores que não variem sua resistência, porém há algumas aplicações que o operador deseja alterar o valor da resistência de maneira controlada. Ao resistor que possui dispositivos que permitem a um operador alterar o valor da sua resistência é dado o nome de *reostato*. A figura 2.8 auxilia no entendimento do conceito do reostato. O princípio de funcionamento do reostato é baseado na circulação de corrente apenas pelo comprimento desejado. Dessa maneira, se a corrente elétrica flui por todo o comprimento do reostato a resistência é máxima, porém se a corrente elétrica flui por um comprimento menor, então a resistência diminui. Dispositivos como estes eram necessários para dar partidas em motores, pois o valor maior da resistência diminui a corrente elétrica; depois que o motor passava a operar normalmente, o operador poderia zerar o valor da resistência do reostato. Reostatos são utilizados em eletrônica para alterar os níveis de tensões medidas nos divisores de tensão (tema tratado no capítulo 3). A seguir dois comentários ajudarão no entendimento do reostato:

- A figura 2.8(a) mostra uma resistência e as setas indicam o sentido da corrente elétrica. Vê-se que a corrente elétrica tem de percorrer todo o comprimento l indicado;
- Imagine agora que pode-se modificar a posição de uma conexão no resistor, como mostrada na figura 2.8(b). Neste caso a corrente elétrica percorre um comprimento menor e, dessa maneira, tem-se uma resistência menor.

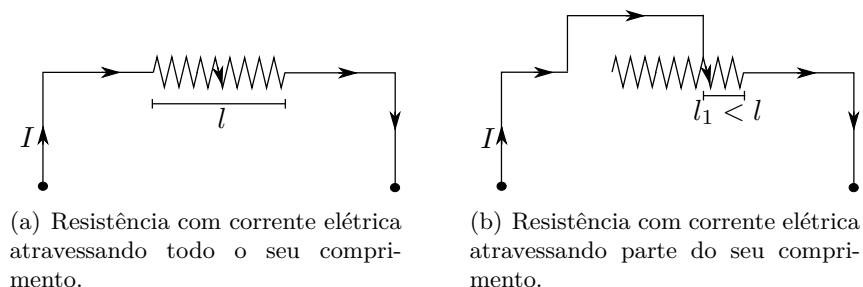


Figura 2.8: Ilustrações para explicação do conceito de reostato.

Os mecanismos utilizados na construção de reostatos não são descritos neste livro, porém o estudante deve ter em mente que eles geralmente são construídos com a alteração do comprimento, como descrito anteriormente, ou alterando a forma como são associados (série ou paralelo, mas este assunto é tema do capítulo 3). A figura 2.9(a) mostra um reostato de elevada potência, enquanto a figura 2.9(b) mostra a representação do reostato em um circuito elétrico.

Antes de finalizar a discussão sobre reostato, é necessário salientar que a tecnologia evoluiu e ele foi substituído em muitos casos por sistemas eletrônicos, pois ao se conectar um reostato ao circuito aumenta-se o efeito resistivo e as perdas por efeito joule, assunto que estudará nas próximas seções. Por exemplo, em partidas de motores o uso de sistemas eletrônicos que controlam a tensão de alimentação são mais adequados, pois são eficientes do ponto de vista energético. Ainda assim os reostatos são muito utilizados, mesmo em circuitos de potência, seja por serem robustos (difíceis de sofrerem danos) ou para testes: é muito comum que se utilize reostatos como carga de testes antes de ligar uma fonte de tensão na carga real, por exemplo.

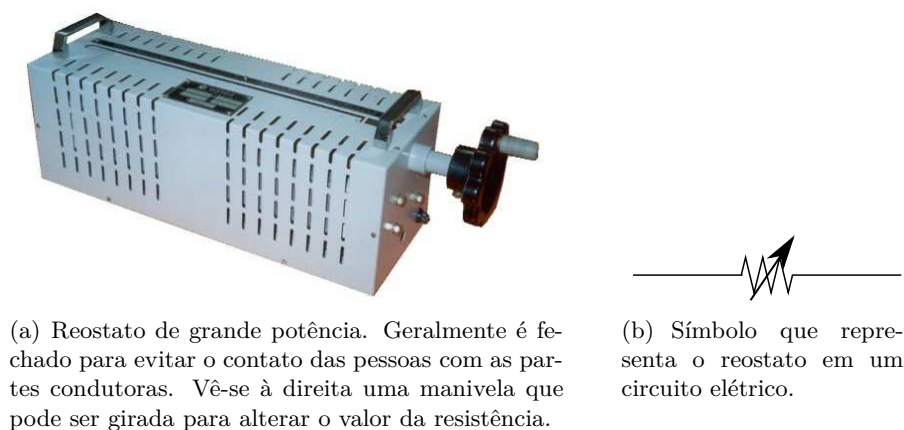


Figura 2.9: Reostato.

2.10 Potência

Se um circuito elétrico é composto por uma fonte de tensão e uma resistência, como mostrado na figura 2.5(a), então pode-se determinar o valor da corrente elétrica circulante empregando a lei de Ohm e a *potência elétrica*. Para perfeito entendimento do conteúdo desta seção, algumas definições são apresentadas a seguir:

Energia Grandeza física que mensura a capacidade de alguma pessoa ou dispositivo realizar alguma tarefa. Alguém bem alimentado possui energia para a prática esportiva, enquanto um desnutrido não possui energia para ser gasta durante a atividade física. O mesmo acontece com os dispositivos. Por exemplo, o motor a combustão de um automóvel só opera se for posto no tanque o combustível adequado para que forneça a quantidade de energia que ele precisa. Pode-se fazer uma análise similar para os dispositivos elétricos, que utilizam a energia elétrica para realizar alguma tarefa, como, por exemplo, aquecer água para o banho, iluminar etc.;

Potência Grandeza física que mensura o gasto ou a geração de energia em um tempo específico. Exemplos de equipamentos cuja descrição do fabricante destaca a potência são muitos. Pode-se comparar, por exemplo, dois automóveis que se diferenciem apenas pela potência dos seus motores. O carro de maior potência conseguirá, partindo da velocidade nula, chegar a uma velocidade de 100 km/h mais rapidamente do que o de menor potência, pois a quantidade de energia liberada nesta aceleração é maior pelo automóvel de maior potência. Assim, o veículo de menor potência levará mais tempo para que o motor forneça a energia necessária para que o mesmo atinja os 100 km/h. Note-se que ambos alcançarão a mesma velocidade final, porém, o de maior potência o fará mais rapidamente.

Neste livro parte do conteúdo dedica-se a descrever dispositivos que gerem ou consumam energia/potência elétrica e, portanto, posteriormente serão destacadas as relações entre grandezas elétricas como tensão, corrente elétrica e resistência para se encontrar o valor da energia/potência desejada.

2.10.1 Efeito Joule

O *atrito* se dá devido ao contato físico entre duas superfícies em movimentos relativos entre si. Se as superfícies são muito lisas, o atrito menor do que entre superfícies rugosas. Uma pista de gelo é uma superfície lisa (com baixo atrito e, por isso, escorregadia) e uma pista de asfalto é uma superfície rugosa (com elevado atrito e, por isso, é utilizado na construção de estradas). Veja que neste caso o atrito criado pelo asfalto é uma característica desejada, pois carros circulando por pistas escorregadias (com pouco atrito) certamente levarão a acidentes mais frequentes. Quanto maior for o atrito entre as

superfícies em contato, maior será a liberação de calor. De maneira contrária, se duas superfícies lisas se movimentam em contato uma com a outra, o atrito será pequeno e a liberação de calor também. Em choques entre partículas se dá um efeito similar, pois há atrito durante o choque e, portanto, liberação de calor.

Considere-se o caso particular de um resistor sendo percorrido por correntes elétricas, como o mostrado nas duas ilustrações da figura 2.10. A figura 2.10(a) mostra o movimento ordenado de elétrons e pode-se notar que há uma quantidade mínima de choques entre eles e, portanto, pouco atrito e geração de calor. Já na figura 2.10(b) o fluxo de elétrons não está tão ordenado e os choques entre os elétrons são mais frequentes, havendo assim maior liberação de calor do que o caso anterior. Haverá também choques entre os elétrons livres (que estão se movimentando) e os núcleos, o que também gera calor. Quanto maior a corrente elétrica, maior será a quantidade de choques e mais calor será liberado.

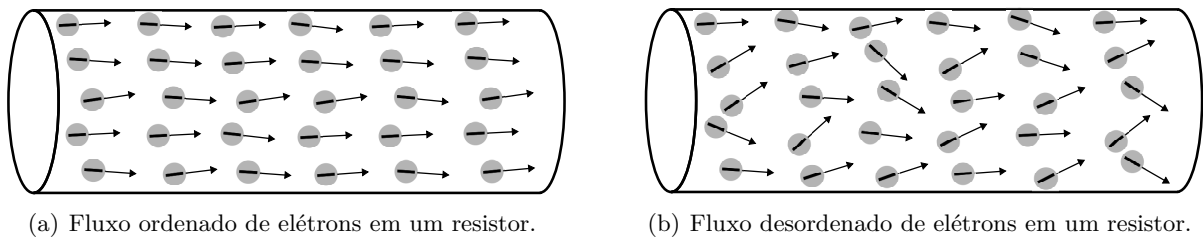


Figura 2.10: Corrente elétrica em um resistor.

Ressalte-se que a representação do movimento dos elétrons mostrada nas ilustrações é apenas para evidenciar as situações de fluxo dos elétrons, mas que na prática o material é composto por átomos que possuem núcleo com nêutrons e prótons, cujas dimensões são significativamente maiores que as dos elétrons. Portanto, uma ilustração mais realista deveria mostrar também o choque entre os elétrons e os núcleos, que constituem a maior parte do átomo. Elétrons movendo-se em fila e sem choques, portanto, não são encontrados na prática.

Como explicado anteriormente, quando um meio é percorrido por corrente elétrica ele dissipa calor. Ao efeito da dissipação de calor devido à passagem da corrente elétrica é dado o nome de *efeito Joule*.

Videoaula 2.4 (Sobre o efeito Joule e a potência elétrica). Para mais informações sobre como se dá o processo de dissipação de calor numa resistência percorrida por corrente elétrica acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/I0tMNb3ngP0>



2.10.2 Equações de potência elétrica

A partir desta seção desenvolve-se o equacionamento necessário para que o estudante consiga prever matematicamente o valor da potência em um dispositivo resistivo se forem conhecidas previamente algumas grandezas elétricas. É necessário salientar que a potência calculada só representa a dissipação de calor em dispositivos elétricos como, por exemplo: resistores eletrônicos, industriais ou de chuveiro; fios etc. Entretanto, muitas vezes se utiliza o conceito de resistência para representar outros equipamentos que realizam trabalho de outra forma que não seja somente geração de calor. Em capítulos posteriores isto ficará mais evidente.

Considerando um circuito elétrico com uma fonte de tensão ligada aos terminais de uma resistência, então haverá uma corrente circulando. A potência P é dada por:

$$P = UI \quad (2.7)$$

A depender do problema pode ser útil ter em mente outras expressões que facilitam o cálculo da potência. Assim são desenvolvidas na sequência outras maneiras de calcular P . Uma das formas é utilizando a lei de Ohm na forma:

$$U = RI \quad (2.8)$$

Substituindo a tensão U da equação (2.8), na equação (2.7), tem-se então que:

$$\begin{aligned} P &= UI \\ P &= (RI)I \end{aligned}$$

o que resulta em:

$$P = RI^2 \quad (2.9)$$

Ainda pode-se desenvolver outra expressão para o cálculo de potência. Sabe-se, da lei de Ohm, que:

$$I = \frac{U}{R} \quad (2.10)$$

Então substituindo a corrente elétrica I da equação (2.10) na equação (2.7), encontra-se:

$$\begin{aligned} P &= UI \\ P &= U \left(\frac{U}{R} \right) \end{aligned}$$

resultando em:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (2.11)$$

Pode-se utilizar qualquer uma das três expressões dadas pelas equações (2.7), (2.9) e (2.11) que será obtido o mesmo valor de potência elétrica. É necessário avaliar cada problema e as variáveis dadas para saber qual das equações permite encontrar a resposta mais facilmente.

A unidade de potência é watt, cuja abreviação é a letra W.

Exemplo 2.9. Os terminais de um resistor, cuja resistência tem valor de $1\text{ M}\Omega$, são submetidos a uma tensão de 127 V . Calcule:

- (a) A intensidade da corrente elétrica que atravessa o resistor;
- (b) A potência dissipada pelo resistor;
- (c) O valor da condutância que representa o resistor.

Solução:

- (a) A intensidade da corrente elétrica é encontrada empregando a lei de Ohm:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{127}{1 \times 10^6} = 127 \times 10^{-6} = 127 \mu\text{A}$$

- (b) A potência dissipada pelo resistor pode ser encontrada de três maneiras:

- (1) A partir dos valores de d.d.p. nos terminais da resistência e da corrente que a atravessa:

$$P = UI = (127) \times (127 \times 10^{-6}) = 16\,129 \times 10^{-6} = 16,129 \times 10^{-3} = 16,129 \text{ mW}$$

- (2) A partir dos valores da resistência e da intensidade da corrente elétrica que a atravessa:

$$P = RI^2 = (1 \times 10^6) \times (127 \times 10^{-6})^2 = 16,129 \text{ mW}$$

- (3) A partir dos valores da resistência e da tensão em seus terminais:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{127^2}{1 \times 10^6} = 16,129 \text{ mW}$$

- (c) A resistência e a condutância representam o grau de oposição que um material oferece a passagem de corrente elétrica, porém, um é o inverso do outro. O cálculo da condutância G solicitada é:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{1 \times 10^6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 1 \times 10^{-6} = 1 \mu\text{S}$$

Uma condutância tão pequena indica dificuldade à passagem de corrente, mas já sabíamos disso, pois a resistência de $1 \text{ M}\Omega$ é muito grande.

□

Videoaula 2.5 (Cálculos de potência elétrica). Para estudar um pouco mais sobre cálculos de potência em elementos resistivos acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/cnBI7pcL3HE>



2.11 Resumo do capítulo

De maneira resumida pode-se destacar as seguintes informações dadas no decorrer do presente capítulo:

- Em um modelo simplificado do átomo, pode-se representá-lo por um núcleo (no qual estão os prótons e nêutrons) e pela eletrosfera (na qual circulam os elétrons). Quanto menos energia se gasta para retirar os elétrons do átomo (pois orbitam afastados do núcleo) mais condutor é o material. Se um material impõe grande dificuldade a retirada de elétrons (orbitam próximos ao núcleo), então diz-se que ele é um péssimo condutor, podendo ser utilizado como isolante;
- A carga elétrica é medida em coulomb ($1\text{ C} = 1,6 \times 10^{19}$ elétrons). A quantidade de carga elétrica que flui em uma determinada área, dividida pelo tempo é igual a intensidade da corrente elétrica ($I = Q/\Delta t$). A unidade de corrente elétrica é o ampère, abreviado pela letra A;
- A tensão U é a grandeza que mensura a quantidade de energia gasta para movimentar os elétrons e sua unidade é o volt, abreviado pela letra V;
- O entendimento das relações entre as grandezas tensão, corrente elétrica e resistência, dados pela lei de Ohm ($U = RI$) é fundamental para a compreensão da teoria de circuitos elétricos. Se a resistência é constante, ainda que sejam alterados os valores de tensão e corrente elétrica, diz-se que é ôhmica. Caso seu valor não seja constante caso a tensão e a corrente se alterem, então ela é do tipo não ôhmica;
- A corrente, ao circular pelo resistor, causa um aquecimento e este fenômeno é chamado de efeito Joule. A potência dissipada em forma de calor pelo resistor pode ser calculada utilizando-se as equações $P = UI = U^2/R = RI^2$;
- A resistência de um fio ou um resistor pode ser calculada se são conhecidos o seu comprimento, a sua área da seção transversal e a sua resistividade, segundo a relação $R = \rho l/A$;
- A resistência dos fios e resistores, entre outros dispositivos, varia com a temperatura, segundo a equação $R_T = R_{20} + R_{20} \times \alpha \times \Delta T$. Se o valor da resistência não varia com a temperatura, caso ideal, o resistor é chamado de resistor ôhmico;
- Chama-se de reostato, o resistor construído de forma que seja possível variar o valor da sua resistência de forma controlada, via, por exemplo, alteração do comprimento do resistor.

Problemas propostos

Problema 2.1. Calcule o valor da resistência de um fio de alumínio de 50 m de comprimento e de bitola 16 mm^2 . Se este fio fosse de cobre, qual seria o valor da resistência?

Problema 2.2. Precisa-se saber a resistividade de materiais enviados a uma fábrica. Os três materiais foram enviados em forma de fios de área da seção reta circular e possuem as seguintes dimensões: 0,5 m de comprimento e 16 mm^2 de área da seção reta. Nos terminais de cada um destes três fios mediu-se com um ohmímetro os seguintes valores de resistência:

- Material 1: $1\text{ m}\Omega$
- Material 2: $4\text{ m}\Omega$
- Material 3: $6\text{ }\Omega$

Calcule o valor da resistividade de cada material. Se você tivesse de escolher um destes materiais para fabricar uma fita isolante de eletricidade, qual dos três seria a melhor opção? Justifique sua resposta.

Problema 2.3. Qual a área da seção reta de um fio de cobre de 120 m de comprimento e resistência de $0,5\text{ }\Omega$?

Problema 2.4. Quais os valores das resistências a 10°C de dois resistores, um de cobre e outro de alumínio, se na temperatura de 20°C eles têm resistência de $1\text{ k}\Omega$?

Problema 2.5. Um resistor de ouro tem a 50°C uma resistência de $0,5\ \Omega$. Qual é o valor da resistência deste resistor na temperatura de referência de 20°C ?

Problema 2.6. Para medir a temperatura de um local desenvolveu-se um medidor baseado na variação da resistência com a temperatura e no uso do ohmímetro (instrumento que mede o valor da resistência). Sabe-se que a 20°C o resistor tem resistência de $10\ \Omega$. Ao ser instalado em um local próximo dos motores da fábrica, o técnico mediu com um ohmímetro uma resistência de $10,6\ \Omega$ no resistor. Qual a temperatura próximo dos motores? Dado: o resistor é feito de prata.

Problema 2.7. Calcule os valores de resistência quando certo resistor é submetido a aumentos de temperatura de 20°C , 40°C e 60°C em relação a temperatura padrão. Dados: o resistor possui resistência de $5\ \text{k}\Omega$ a 20°C e é feito de um material novo cujo coeficiente de temperatura vale $0,0021/^{\circ}\text{C}$.

Problema 2.8. Calcule o valor das resistências a 80°C , de resistores feitos, respectivamente, de prata, cobre, ouro e alumínio quando suas resistências são de $1\ \Omega$ a 20°C .

Problema 2.9. Considere que certo dispositivo elétrico pode ser modelado por uma resistência ôhmica de $5\ \Omega$ e que ele é alimentado em seus terminais por uma d.d.p. de $220\ \text{V}$, então:

- (a) Calcule os valores das potência e intensidade da corrente elétrica consumida por este dispositivo;
- (b) Calcule o valor da condutância que modela este dispositivo;
- (c) Calcule os valores das potência e intensidade da corrente elétrica se a alimentação do dispositivo tem o valor alterado para $380\ \text{V}$.
- (d) No caso do valor da alimentação ser alterada, o que acontece com os valores da resistência e condutância que modelam o dispositivo?

Problema 2.10. Considere para este problema que a rede elétrica fornece apenas tensões de $220\ \text{V}$. Um técnico foi a uma loja de materiais elétricos e identificou três chuveiros, nos quais havia os seguintes dados identificados na embalagem:

Chuveiro do fabricante 1 $4\ 400\ \text{W}$ e $220\ \text{V}$;

Chuveiro do fabricante 2 $4\ 400\ \text{W}$ e $127\ \text{V}$;

Chuveiro do fabricante 3 $4\ 400\ \text{W}$ e $380\ \text{V}$.

Considere que a troca de calor entre os resistores e a água faz com que a temperatura dos resistores não se altere significativamente e os mesmos possam ser considerados de resistências constantes.

- (a) Calcule as intensidades das correntes e potências elétricas no caso dos chuveiros serem instalados na rede elétrica;
- (b) Verifique se eles operam com a potência elétrica como identificada pelo fabricante nas respectivas embalagens;
- (c) Considerando aspectos práticos pode-se instalar os três chuveiros nesta rede sem risco deles se danificarem?

Problema 2.11. Tem-se uma bateria de $12\ \text{V}$ alimentando um dispositivo que consome uma potência de $0,8\ \text{kW}$. Resolva os itens a seguir:

- (a) Calcule a corrente elétrica consumida por este dispositivo;
- (b) Se o dispositivo for representado em um circuito elétrico por uma condutância G , qual seria o valor de G ?

Problema 2.12. O filamento de uma lâmpada incandescente pode ser representado por uma resistência ôhmica⁴. Se as lâmpadas de um determinado fabricante possuem na embalagem os valores 127 V e 60 W, responda:

- (a) Quais os valores da corrente elétrica e potência se esta lâmpada for ligada em uma tomada de 220 V?
- (b) O que acontecerá com esta lâmpada se for ligada nesta tomada de 220 V?

⁴Faz algum tempo que é proibido fabricar e comercializar este tipo de lâmpada no Brasil, pois ela é muito ineficiente: um quarto exigiria uma lâmpada incandescente de 40 W enquanto que uma lâmpada LED de 10 W iluminaria o mesmo quarto adequadamente. Na prática a lâmpada incandescente está longe de poder ser modelada por uma resistência ôhmica, pois ela opera com altas temperaturas e certamente a sua resistência varia bastante em comparação ao valor quando não estava acesa.

Capítulo 3

Circuitos resistivos básicos

3.1 Introdução

Neste capítulo são descritas técnicas para calcular valores de grandezas como tensão, corrente e potência em circuitos com uma única fonte de tensão e que possuem mais de uma resistência. Para encontrar as grandezas de interesse de alguns circuitos, o estudante tem de aprender como calcular a resistência equivalente, que é um conceito que será utilizado em toda a sua vida profissional.

3.2 Associação de resistências

As seções 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3 mostram como podem ser resolvidos alguns problemas de circuitos empregando o conceito de *resistência equivalente*. Desta maneira, o estudante conseguirá simplificar um circuito complexo e transformá-lo em uma única resistência, o que facilita os cálculos. As figuras 3.1(a) e 3.1(b), mostram, respectivamente, o circuito original e a sua resistência equivalente, que é simbolizada por R_{eq} e que é dada por:

$$R_{eq} = \frac{U}{I} \quad (3.1)$$

Sendo U a d.d.p. entre os terminais da associação de resistências e I a corrente total (ver ilustrações da figura 3.1 para identificar U e I).

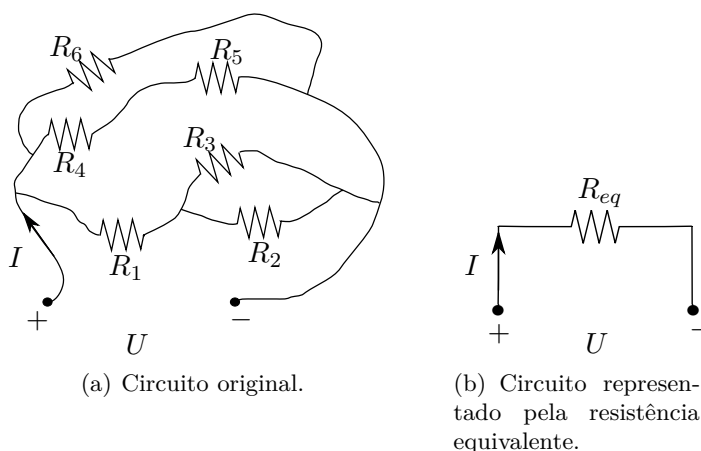


Figura 3.1: Circuitos para análise do conceito de resistência equivalente.

R_{eq} substitui toda a associação, então a sua potência consumida é igual a de toda a associação.

No caso do circuito da figura 3.1, tem-se que:

$$P_{R_{eq}} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} + P_{R_6}$$

Para resumir, define-se resistência equivalente como uma resistência única que pode representar os efeitos de todas as resistências do circuito original, de maneira que a tensão nos terminais da associação de resistências seja a mesma que a dos terminais de R_{eq} , a corrente que flui pelos terminais da associação é a mesma que circula por R_{eq} e que a potência consumida por toda a associação é a mesma consumida por R_{eq} .

3.2.1 Associação de resistências em série

Resistências estão associadas em série quando os terminais são ligados conforme mostrado na figura 3.2(a), de tal maneira que todas são atravessadas pela mesma corrente. O cálculo da resistência equivalente simplifica o circuito, conforme mostrado na figura 3.2(b). Saliente-se que na figura 3.2(a) o circuito tem apenas três resistências, mas pode-se ter qualquer quantidade delas associadas em série. Na sequência é mostrado como se calcula R_{eq} .

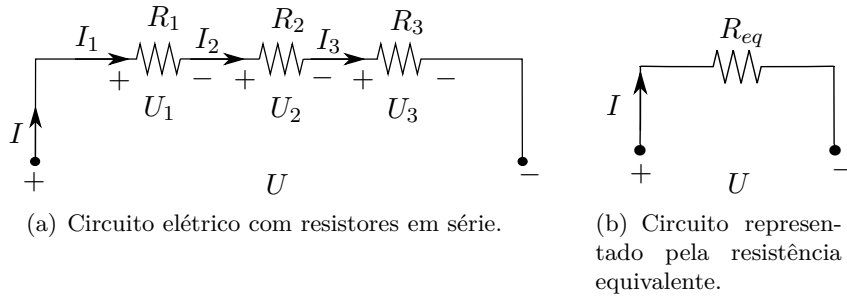


Figura 3.2: Resistência equivalente em circuitos com resistências em série.

Da figura 3.2(a) identifica-se que:

$$I = I_1 = I_2 = I_3 \quad (3.2)$$

e

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 \\ U &= R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) em (3.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} U &= R_1 I + R_2 I + R_3 I \\ U &= (R_1 + R_2 + R_3) I \\ \frac{U}{I} &= R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Comparando as equações (3.1) e (3.4) nota-se que:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Portanto, o valor da resistência equivalente de uma associação em série é encontrado fazendo-se a soma das resistências. Para o caso de n resistências associadas em série, tem-se que:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n \quad (3.5)$$

Exemplo 3.1. Calcule os valores da d.d.p., da potência e da intensidade da corrente na resistência de $20\ \Omega$ do circuito mostrado na figura 3.3(a).

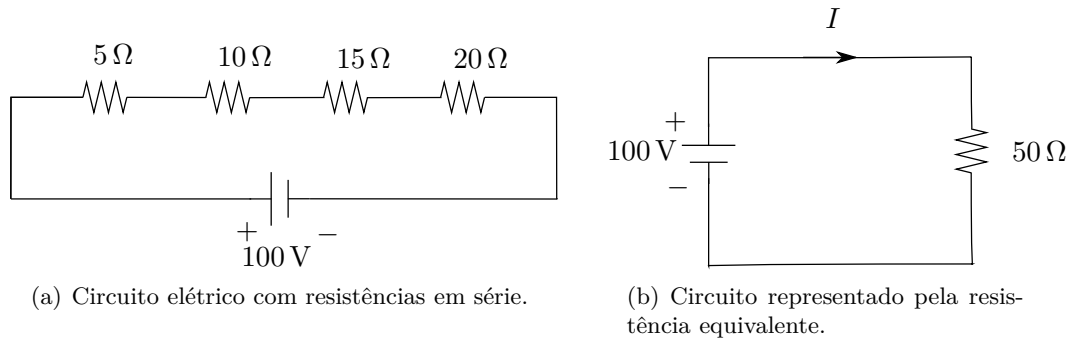


Figura 3.3: Circuitos referentes ao exemplo 3.1.

Solução:

A corrente que atravessa as quatro resistências é a mesma e sua intensidade pode ser encontrada facilmente se R_{eq} for calculado, como é mostrado a seguir. Empregando a equação (3.5) com os valores do circuito em estudo, encontra-se:

$$R_{eq} = 5 + 10 + 15 + 20 = 50\ \Omega$$

O circuito com a resistência equivalente com a indicação da corrente é mostrado na figura 3.3(b). A intensidade da corrente que atravessa a resistência equivalente é, portanto:

$$I = \frac{100}{50} = 2\ \text{A}$$

Como a corrente que atravessa as resistências da associação em série é a mesma que atravessa R_{eq} , então tem-se que a corrente que atravessa a resistência de $20\ \Omega$ é $I_{20\Omega} = 2\ \text{A}$.

Analisando novamente o circuito da figura 3.3(a) e lembrando da lei de Ohm ($U = RI$), pode-se calcular a d.d.p. nos terminais da resistência de $20\ \Omega$, que é dada por:

$$U_{20\Omega} = 20 \times 2 = 40\ \text{V}$$

A associação em série de resistências é chamada de *divisor de tensão*, pois a tensão da fonte se divide por todas as resistências associadas. A potência na resistência pode ser calculada, por exemplo, usando os valores da tensão nos terminais da resistência e a corrente que a atravessa, obtendo-se:

$$P_{20\Omega} = U_{20\Omega} I_{20\Omega} = 40 \times 2 = 80\ \text{W}$$

Note que a tensão utilizada no cálculo da potência na resistência de $20\ \Omega$ é a d.d.p. em seus terminais (40 V) e não o valor de 100 V que é a d.d.p. nos terminais da associação em série de resistências.

□

Videoaula 3.1 (Sobre R_{eq} e associação de resistências em série). Para mais informações sobre a definição de resistência equivalente e associação de resistências em série acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/CE-ugECJM1s>



3.2.2 Associação de resistências em paralelo

Resistências estão associadas em paralelo quando seus terminais estão ligados conforme mostrado na figura 3.4(a), de tal maneira que todas possuam a mesma d.d.p. em seus terminais. O cálculo da resistência equivalente simplificará o circuito conforme mostrado na figura 3.4(b). Saliente-se que na figura 3.4(a) o circuito tem apenas três resistências, mas pode-se ter qualquer quantidade de resistências em paralelo. Na sequência é mostrado como se calcula R_{eq} .

Da figura 3.4(a) identifica-se que:

$$U = U_1 = U_2 = U_3 \quad (3.6)$$

e

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (3.7)$$

Lembrando da lei de Ohm, pode-se encontrar os valores das correntes elétricas que atravessam cada uma das resistências, assim ($I_1 = U_1/R_1$, $I_2 = U_2/R_2$ e $I_3 = U_3/R_3$). Portanto, pode-se escrever a equação (3.7) como a seguir:

$$I = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} \quad (3.8)$$

Substituindo U da equação (3.6) na equação (3.8), obtém-se:

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} \\ I &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U \\ \frac{I}{U} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sendo $R_{eq} = U/I$, então $1/R_{eq} = I/U$, portanto, equação (3.9) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (3.10)$$

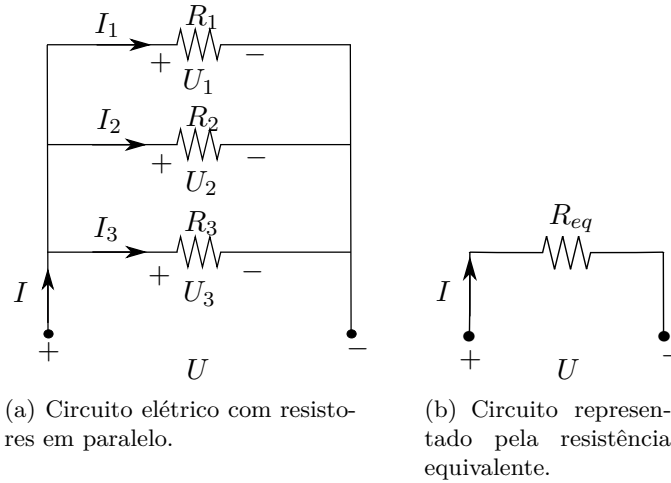


Figura 3.4: Resistência equivalente em circuitos com resistências em paralelo.

A equação (3.10) mostra como pode-se calcular a resistência equivalente de um circuito com três resistências. Para o caso de n resistências associadas em paralelo, tem-se que:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad (3.11)$$

Dois casos especiais devem ser destacados:

1. Circuitos com apenas duas resistências em paralelo. Neste caso tem-se:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \times R_2}$$

Portanto:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.12)$$

2. Circuitos com N resistências de mesmo valor em paralelo. Neste caso tem-se:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \overbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R}}^N = \frac{\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^N}{R} = \frac{N}{R}$$

Portanto:

$$R_{eq} = \frac{R}{N} \quad (3.13)$$

Uma notação usual para resistências em paralelo é escrever $//$, assim pode-se dizer que as resistências R_1 , R_2 e R_3 na figura 3.4(a) estão em paralelo ou simplesmente escrever $R_1//R_2//R_3$.

Exemplo 3.2. Calcule o valor da potência total consumida pelas quatro resistências do circuito mostrado na figura 3.5(a).

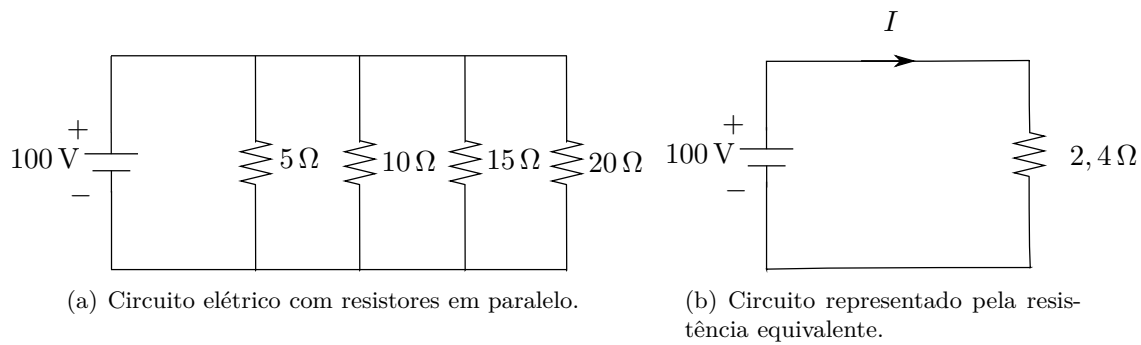


Figura 3.5: Circuitos referentes ao exemplo 3.2.

Solução:

O valor da potência total consumida pelas quatro resistências é o mesmo da potência consumida pela resistência equivalente. Portanto, o primeiro passo para solucionar este problema é calcular R_{eq} , obtido com a utilização da equação (3.11) e com os valores de resistência do circuito em estudo. R_{eq} é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{12 + 6 + 4 + 3}{60} \\ \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{25}{60}\end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned}R_{eq} &= \frac{60}{25} \\ R_{eq} &= 2,4 \Omega\end{aligned}$$

A figura 3.5(b) mostra o circuito com a resistência equivalente. A potência então pode ser encontrada por:

$$\begin{aligned}P_{total} &= \frac{U^2}{R_{eq}} = \frac{100^2}{2,4} \\ P_{total} &= 4166,7 \text{ W} \\ P_{total} &= 4,167 \text{ kW}\end{aligned}$$

Note que P_{total} pode ser encontrado também multiplicando o valor da d.d.p. nos terminais de R_{eq} pela intensidade da corrente que a atravessa, ou seja:

$$I = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{100}{2,4} = 41,67 \text{ A}$$

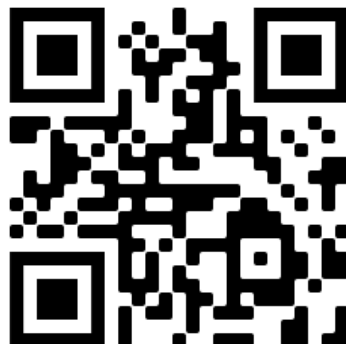
portanto:

$$P_{total} = UI = 100 \times 41,67 = 4167 \text{ W} = 4,167 \text{ kW}$$

□

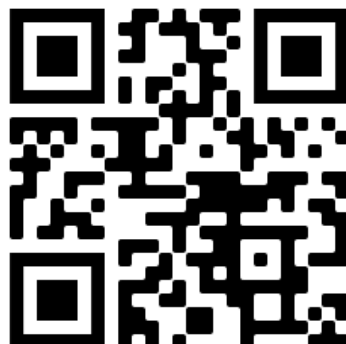
Videoaula 3.2 (Sobre associação de resistências em paralelo). Para mais informações sobre a associação de resistências em paralelo acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/SE-od8pEooY>



Videoaula 3.3 (Sobre casos especiais da associação em paralelo de resistências). Para mais informações sobre a associação de resistências em paralelo quando elas forem iguais ou houver apenas duas delas acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/XGltxRx3x9I>



3.2.3 Associação mista de resistências

Quando em um mesmo circuito há resistências associadas em série e em paralelo diz-se que há uma *associação mista de resistências*. Identificadas as formas de ligações das resistências (em série ou em paralelo) deve-se realizar as devidas simplificações para encontrar o valor da resistência equivalente.

Uma sugestão para que o estudante encontre R_{eq} de maneira mais fácil é:

Passo 1 Identificar todas as resistências que estão associadas em série e então calcular a resistência equivalente delas;

Passo 2 Identificar todas as resistências que estão em paralelo e então calcular a resistência equivalente delas;

Passo 3 Repetir os passos 1 e 2 até encontrar R_{eq} .

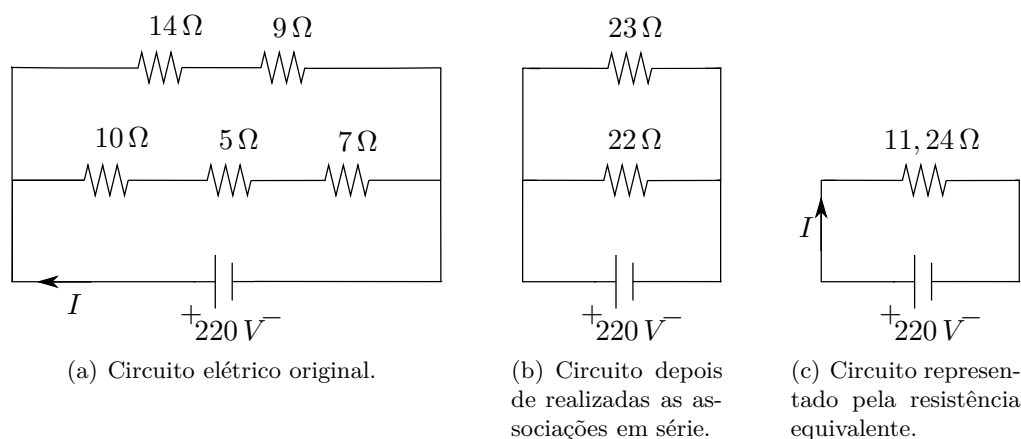


Figura 3.6: Circuitos referentes ao exemplo 3.3.

Exemplo 3.3. Calcule o valor da corrente I que passa pela fonte de tensão do circuito mostrado na figura 3.6(a).

Solução:

Observando o circuito da figura 3.6(a) nota-se que:

- As resistências de 14Ω e de 9Ω estão em série, resultando em uma resistência equivalente de $14 + 9 = 23\Omega$;
- As resistências de 10Ω , 5Ω e 7Ω também estão em série, resultando em uma resistência equivalente de $10 + 5 + 7 = 22\Omega$.

O circuito mostrado na figura 3.6(b) ilustra como fica a representação após os cálculos serem realizados. É possível perceber que as resistências de 23Ω e 22Ω estão em paralelo. A resistência equivalente total é, portanto, dada por:

$$R_{eq} = \frac{23 \times 22}{23 + 22} = 11,24\Omega$$

O circuito mostrado na figura 3.6(c) permite concluir que a corrente I que atravessa R_{eq} é o mesmo que atravessa a fonte, e seu valor é:

$$I = \frac{220}{11,24} = 19,56\text{ A}$$

□

Exemplo 3.4. Calcule o valor da resistência equivalente, vista a partir dos a e b , do circuito mostrado na figura 3.7

Solução:

Identificar quais resistências estão em série e quais estão em paralelo ficará mais fácil se o circuito for redesenhado com fios mais retos, como mostrado na figura 3.8(a). O estudante deve comparar as ilustrações para perceber que ambos os circuitos possuem ligações idênticas, ainda que os desenhos sejam feitos de maneira diferente.

A principal dificuldade dos(as) estudante talvez seja perceber a ligação em paralelo das duas resistências de 6Ω e, portanto, deve dar atenção especial a esta conexão. É sugerido que o estudante redesenhe o circuito original por conta própria para exercitar.

Agora que o circuito está redesenhado de maneira mais clara, pode-se então continuar a solucionar a questão. Seguindo a metodologia proposta, primeiro faz-se as simplificações dos trechos nos quais as resistências estão em série e depois em paralelo; isto é refeito até que se encontre R_{eq} . Primeiramente deve-se encontrar as resistências ligadas em série e estas são indicadas na mesma figura 3.8(a). A seguir comentários sobre estas associações:

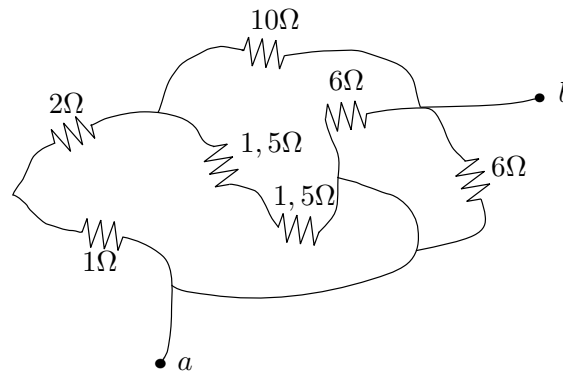


Figura 3.7: Circuito elétrico relativo ao exemplo 3.4.

- As resistências de $1\ \Omega$ e $2\ \Omega$ estão em série e podem ser substituídas por uma única equivalente de valor $3\ \Omega$;
- As resistências de $1,5\ \Omega$ e $1,5\ \Omega$ estão em série e podem ser substituídas por uma única equivalente de valor $3\ \Omega$.

A figura 3.8(b) mostra o circuito após as operações em série.

O passo seguinte é identificar as resistências conectadas em paralelo e isto já está feito na figura 3.8(b). Deve-se lembrar que quando resistências de valores iguais estão em paralelo, então a resistência equivalente é obtida dividindo o valor das resistências pela quantidade. Realizando a operação em paralelo:

$$\frac{3\ \Omega}{2} = 1,5\ \Omega$$

e

$$\frac{6\ \Omega}{2} = 3\ \Omega$$

Então o circuito fica ainda menor, como mostrado na figura 3.8(c)..

Como o método utilizado diz que deve-se procurar alternadamente as resistências em série e em paralelo, então agora volta-se a buscar as resistências em série, que são mostradas no circuito da figura 3.8(c).

Finalmente fica evidente a ligação em paralelo entre as resistências de $11,5\ \Omega$ e $3\ \Omega$, o que resulta em:

$$R_{eq} = \frac{11,5 \times 3}{11,5 + 3} = 2,38\ \Omega$$

O circuito mostrado na figura 3.8(e) é equivalente ao original (figura 3.7) se for levada em consideração apenas os terminais a e b como pontos de análise para medição da corrente, tensão e potência.

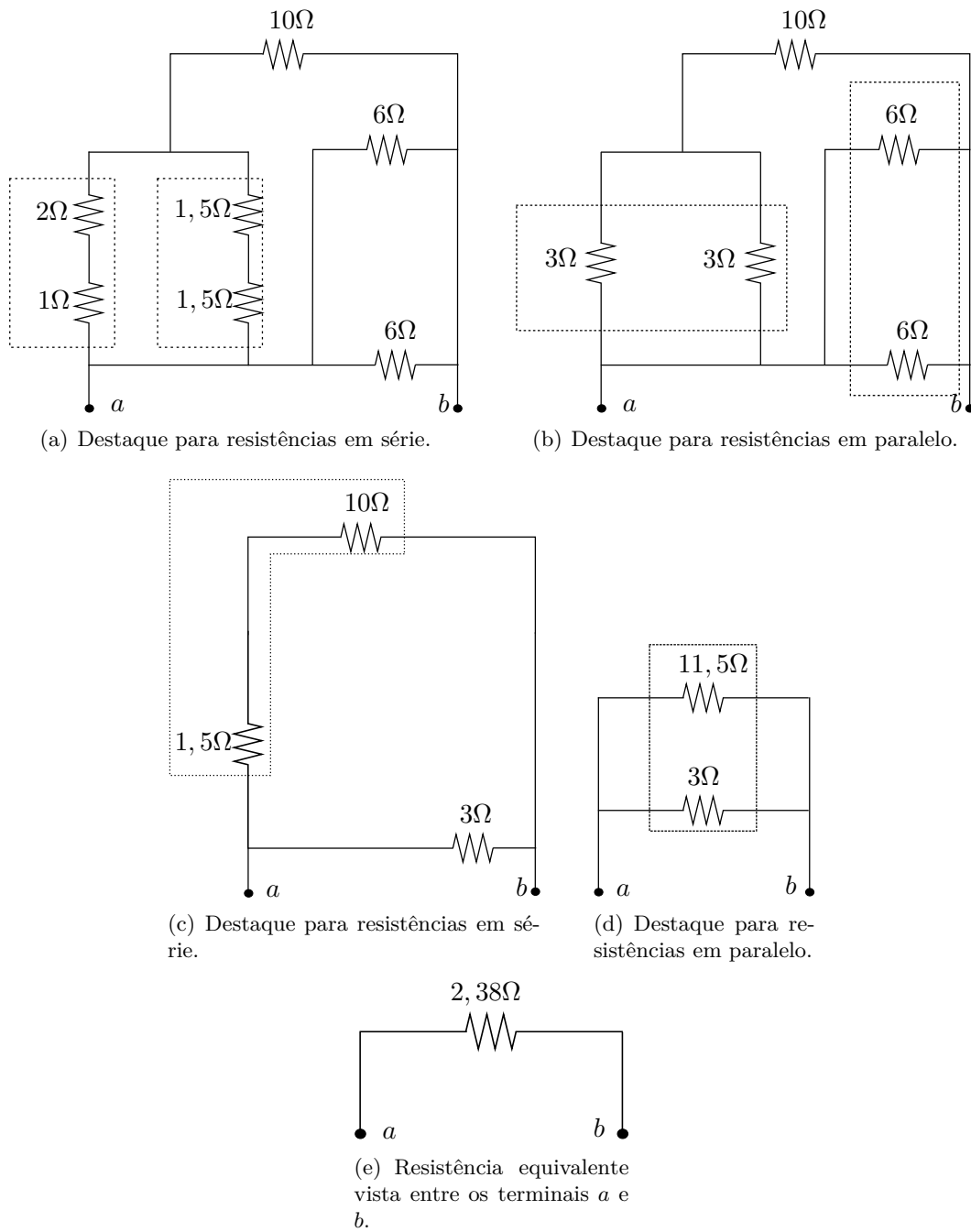
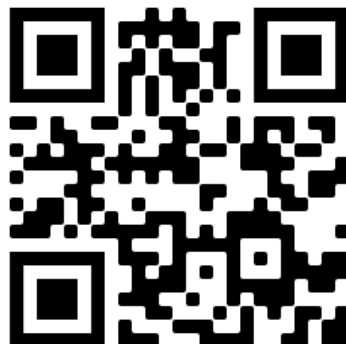


Figura 3.8: Circuitos relativos ao exemplo 3.4.

Videoaula 3.4 (Sobre associação mista de resistências). Para mais informações sobre associação mista de resistências acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/H7JPaZDZn20>



3.3 Resistência equivalente vista de vários terminais

Algo a ser salientado é que o valor da resistência equivalente em um circuito depende dos terminais pelos quais deseja-se calcular R_{eq} . Isto fica mais claro se os circuitos da figura 3.9 são analisados.

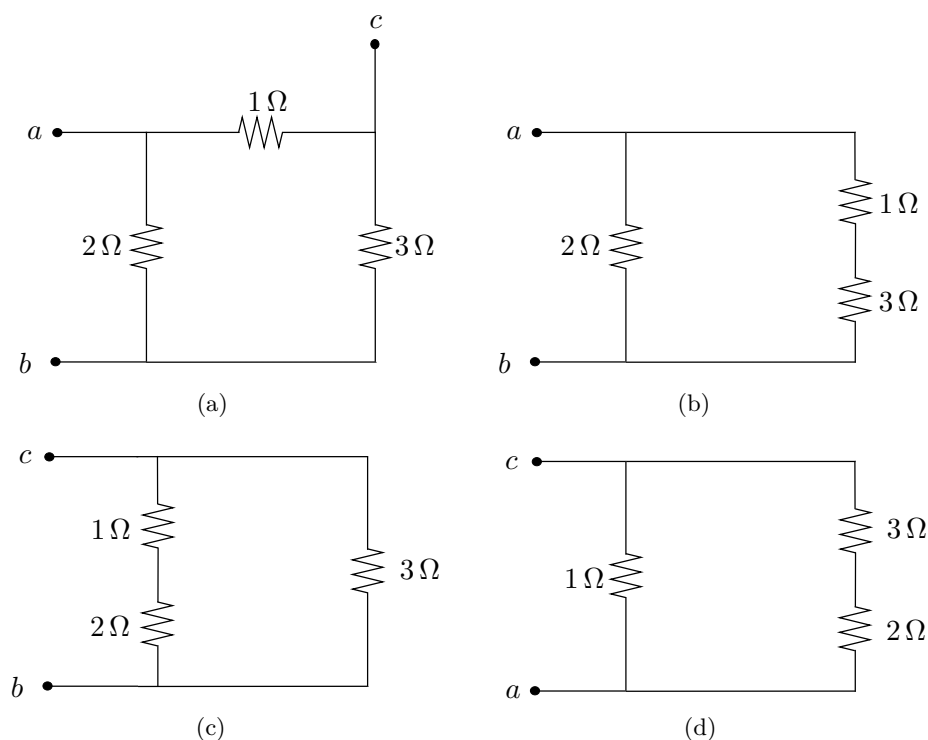


Figura 3.9: Resistência equivalente vista de vários terminais.

Na figura 3.9(a) vê-se o circuito original, com os terminais a , b e c em destaque. Destes três terminais pode-se calcular três resistências equivalentes distintas, como descrito a seguir:

$R_{eq(ab)}$ Para o cálculo da resistência equivalente entre os terminais a e b , o circuito pode ser redesenhado para melhorar a visualização conforme mostrado na figura 3.9(b). Vê-se que o terminal c foi eliminado, já que a análise a ser feita não o leva em consideração. Identifica-se que as resistências de 1Ω e 3Ω estão em série, resultando em uma equivalente de $1 + 3 = 4\Omega$; esta resistência de 4Ω está em paralelo com a de 2Ω , resultando na resistência equivalente total $R_{eq(ab)} = 2//4 = (2 \times 4)/(2 + 4) = 4/3 = 1,33\Omega$;

$R_{eq(bc)}$ Para o cálculo da resistência equivalente entre os terminais b e c , o circuito pode ser redesenhado para melhor visualização conforme mostrado na figura 3.9(c). Identifica-se que as resistências de 1Ω e 2Ω estão em série, resultando em uma equivalente de $1 + 2 = 3\Omega$; esta resistência de 3Ω está em paralelo com a de 3Ω , resultando na resistência equivalente total $R_{eq(bc)} = 3//3 = 3/2 = 1,5\Omega$;

$R_{eq(ac)}$ Para o cálculo da resistência equivalente entre os terminais a e c , o circuito pode ser redesenhado para melhor visualização conforme mostrado na figura 3.9(d). Identifica-se que as resistências de 2Ω e 3Ω estão em série, resultando em uma equivalente de $2 + 3 = 5\Omega$; esta resistência de 5Ω está em paralelo com a de 1Ω , resultando na resistência equivalente total $R_{eq(ac)} = 5//1 = (5 \times 1)/(5 + 1) = 5/6 = 0,83\Omega$.

É necessário que no instante de se resolver um problema esteja perfeitamente claro para o estudante quais terminais devem ser levados em consideração. Uma sugestão é sempre redesenhar o circuito eliminando os terminais que não estão sendo analisados.

Exemplo 3.5. Calcule os valores de $R_{eq(ac)}$, $R_{eq(ab)}$ e $R_{eq(bc)}$ baseando-se no circuito exibido na figura 3.10.

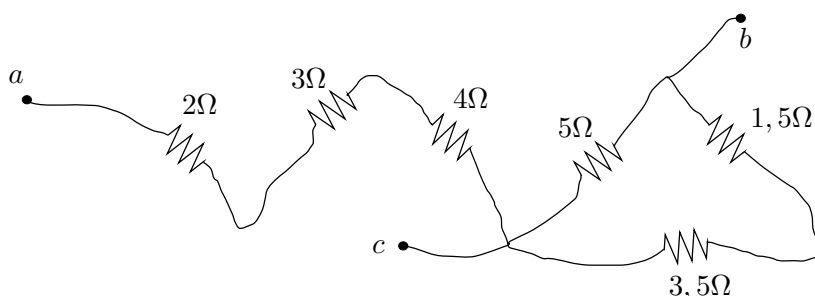


Figura 3.10: Calcular $R_{eq(ac)}$, $R_{eq(ab)}$ e $R_{eq(bc)}$.

Solução:

Inicialmente calcula-se o valor de $R_{eq(ac)}$. O estudante deve notar que entre os terminais a e c há apenas as resistências de 2Ω , 3Ω e 4Ω em série (as demais são ignoradas, pois não estão entre os terminais a e c), daí conclui-se que:

$$R_{eq(ac)} = 2 + 3 + 4 = 9\Omega$$

Agora calcula-se o valor de $R_{eq(ab)}$. Da análise da figura 3.10 nota-se que as resistências 2Ω , 3Ω e 4Ω formam um conjunto-série, de resistência equivalente de 9Ω , e que as resistências de $3,5\Omega$ e $1,5\Omega$ formam outro conjunto-série, de resistência equivalente de 5Ω . O circuito é redesenhado e mostrado na figura 3.11(a). Neste, nota-se que há duas resistências de 5Ω em paralelo de maneira que a sua associação resulta em $5//5 = 5/2 = 2,5\Omega$. O circuito redesenhado e mostrado na figura 3.11(b) evidencia que:

$$R_{eq(ab)} = 9 + 2,5 = 11,5\Omega$$

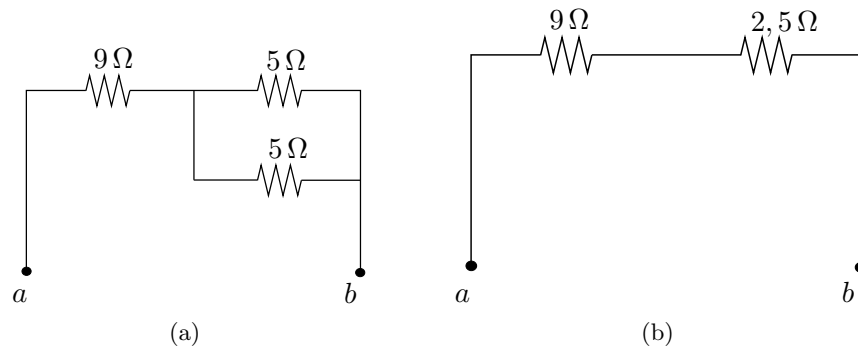


Figura 3.11: Circuitos para facilitar o entendimento da solução de $R_{eq(ab)}$ do exemplo 3.5.

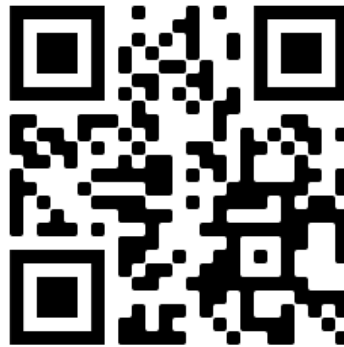
Para finalizar, calcula-se o valor de $R_{eq(bc)}$. O estudante deve perceber que as resistências de 2Ω , 3Ω e 4Ω não estão entre os terminais b e c , não influenciando no cálculo de $R_{eq(bc)}$. Portanto, identificando as resistências em série nota-se que pode-se fazer $3,5 + 1,5 = 5\Omega$ e o circuito limita-se a duas resistências de 5Ω em paralelo, assim tem-se que:

$$R_{eq(bc)} = 5//5 = 5/2 = 2,5\Omega$$

□

Videoaula 3.5 (Sobre R_{eq} vista de vários terminais). Para mais informações sobre como calcular a resistência equivalente a partir de terminais diferentes acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/it4vFmmwuSg>



3.4 Curto-circuito

Um termo comumente usado pelos profissionais das áreas relacionadas com a eletricidade é o *curto-circuito*. Este termo é empregado para indicar que os terminais de um dispositivo são ligados por um fio que possui baixo valor de resistência (no caso de um fio ideal $R = 0$), como ilustrado nos circuitos vistos na figura 3.12. Na figura 3.12(a) vê-se o circuito original no qual identifica-se que:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

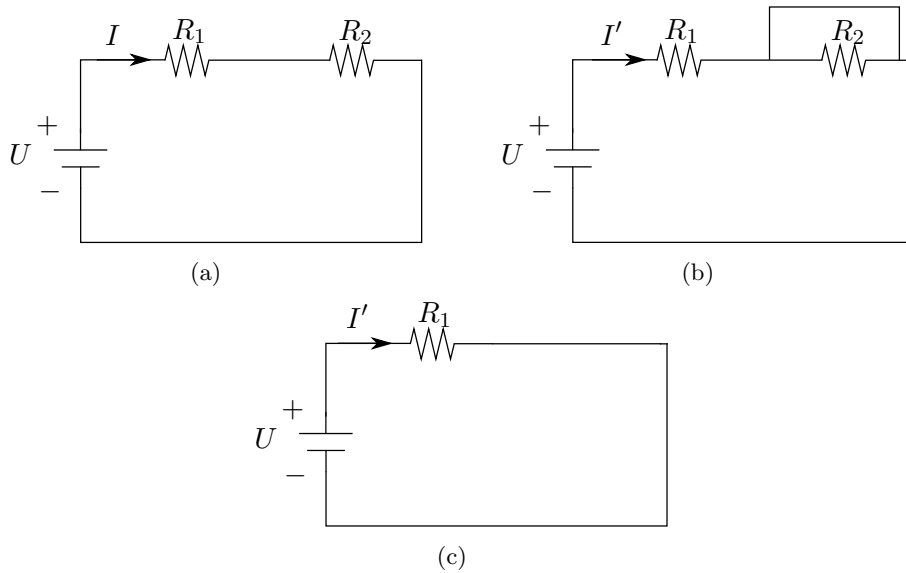


Figura 3.12: Circuito elétrico com curto-circuito na resistência R_2 .

Na figura 3.12(b) nota-se que devido à presença do curto-circuito, a resistência R_2 não influencia mais no circuito, podendo ser retirada da representação, como mostrado na figura 3.12(c). Com o curto-circuito, ilustrado na figura 3.12(c), pode-se identificar que:

$$I' = \frac{U}{R_1}$$

Isto significa dizer que a resistência equivalente total diminuiu (antes era $R_1 + R_2$ e depois do curto-circuito tornou-se R_1) e, portanto, a intensidade da corrente aumentou. Se o curto-circuito ocorre por um acidente ou descuido, o aumento da intensidade da corrente pode danificar equipamentos ou mesmo por em risco a vida das pessoas que trabalham com estes equipamentos.

Saliente-se que pode-se intencionalmente curto-circuitar equipamentos quando for conveniente para a operação (veja exemplo 3.6), assim sendo o estudante não deve ter em mente que todo curto-circuito é sempre indesejável ou perigoso.

Exemplo 3.6. Um equipamento elétrico pode ser representado por uma resistência $R_{equip} = 4\ \Omega$. Um resistor de resistência $R_{limitador} = 1\ \Omega$ é posto em série para limitar a intensidade da corrente, quando conveniente. O sistema completo, com a fonte de tensão de $U_{fonte} = 380\text{ V}$, é ilustrado no circuito na figura 3.13(a) e opera em duas situações, descritas a seguir:

(a) Com a chave *ch* aberta;

(b) Com a chave *ch* fechada.

Nestes dois casos calcule as intensidades das correntes drenadas pelo equipamento.

Solução:

Com a chave *ch* aberta, ambas as resistências influenciam na intensidade da corrente, cujo valor é:

$$I = \frac{U_{fonte}}{R_{equip} + R_{limitador}} = \frac{380}{4 + 1} = \frac{380}{5} = 76\text{ A}$$

Com a chave *ch* fechada somente a resistência do equipamento influencia na intensidade da corrente, cujo valor é:

$$I = \frac{U_{fonte}}{R_{equip}} = \frac{380}{4} = 95\text{ A}$$

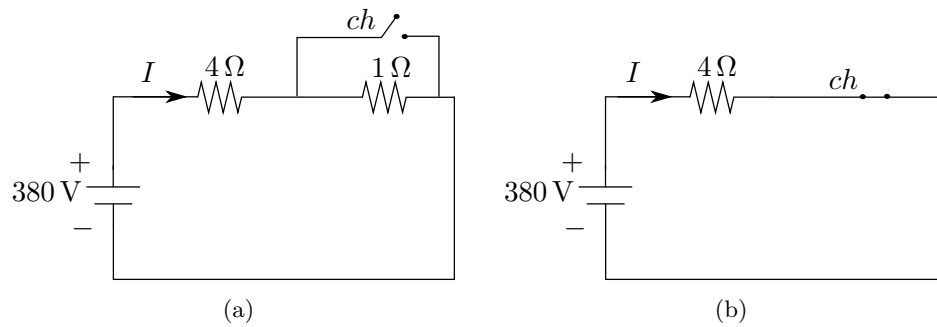


Figura 3.13: Circuito elétrico relativo ao exemplo 3.6.

Deve-se notar neste exemplo que a presença de um resistor em série diminuiu o valor da corrente consumida pelo equipamento. Em muitas aplicações, resistores são postos em série com equipamentos para limitar a intensidade da corrente no início do funcionamento e depois que o equipamento está operando adequadamente os resistores são retirados com um curto-circuito em seus terminais de maneira similar a como feita neste exemplo. Muitos profissionais chamam o procedimento de curto circuitar um dispositivo (no nosso caso uma resistência) propositalmente para que ele não influencie mais no circuito de *by pass* ou, em mistura de línguas, diz-se que o dispositivo foi *bypassado*.

□

Exemplo 3.7. Calcule os valores de $R_{eq(ac)}$, $R_{eq(ab)}$ e $R_{eq(bc)}$ baseando-se no circuito exibido na figura 3.14.

Solução:

O estudante deve notar a semelhança entre os circuitos da figura 3.10 (referente ao exemplo 3.5) e o da figura 3.14, mas eles não são iguais, pois no presente exemplo há um curto circuito.

Começando com o cálculo do valor de $R_{eq(ac)}$: redesenhando o circuito fica mais fácil perceber que tipo de associação há entre as resistências (ver figura 3.15(a)). Vê-se que as de 2Ω e 3Ω formam um conjunto-série, de resistência equivalente de 5Ω , assim como as de $3,5\Omega$ e $1,5\Omega$, de resistência equivalente também de 5Ω . O circuito é redesenhado mais uma vez, como mostrado na figura 3.15(b). Agora percebe-se que:

$$R_{eq(ac)} = 5 + (4//5//5) = \frac{85}{13} = 6,54\Omega$$

Seguindo para o cálculo do valor de $R_{eq(ab)}$: da análise da figura 3.14 nota-se que o terminal b é ligado pelo curto-circuito até um dos terminais da resistência de 3Ω , desta maneira, há entre os terminais a e b , apenas as resistências de 2Ω e 3Ω , que estão associadas em série, daí tem-se que:

$$R_{eq(ab)} = 2 + 3 = 5\Omega$$

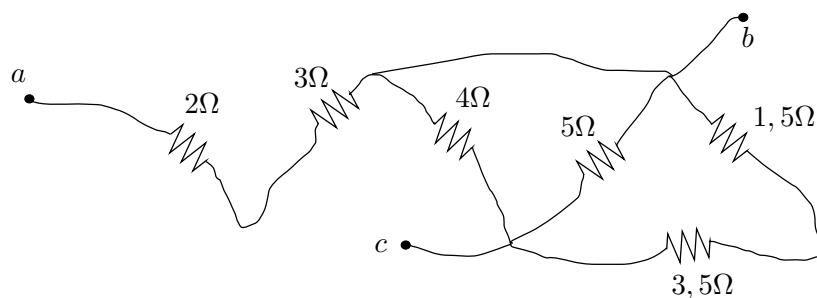


Figura 3.14: Calcular $R_{eq(ac)}$, $R_{eq(ab)}$ e $R_{eq(bc)}$.

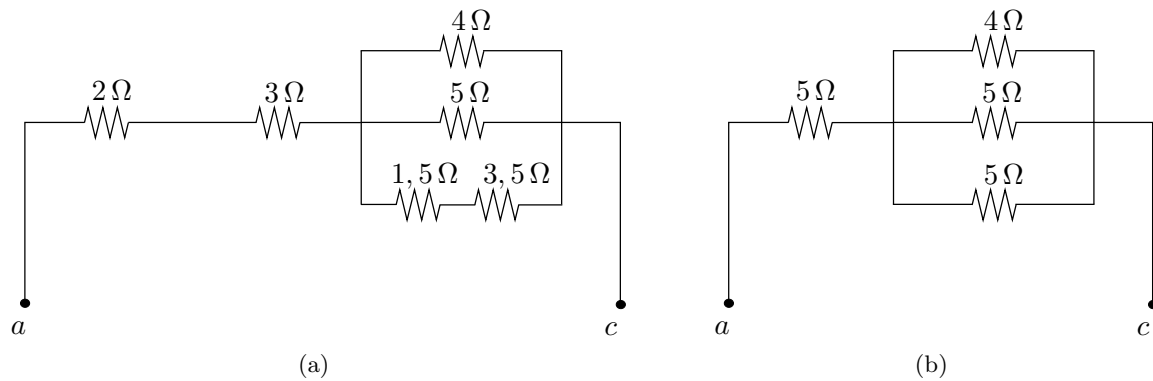


Figura 3.15: Circuitos para facilitar o entendimento da solução de $R_{eq(ac)}$ do exemplo 3.7.

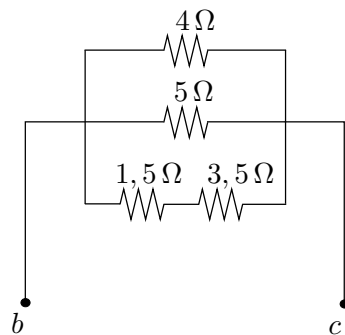


Figura 3.16: Circuitos para facilitar o entendimento da solução de $R_{eq(bc)}$ do exemplo 3.7.

Para finalizar, calcula-se o valor de $R_{eq(bc)}$: o estudante deve perceber que as resistências de 2Ω e 3Ω e não estão entre os terminais b e c e, portanto, não influenciam no cálculo de $R_{eq(bc)}$. Para ilustrar melhor como fica o circuito após a eliminação destas resistências, deve-se observar a figura 3.16. Da análise do circuito identifica-se que:

$$R_{eq(bc)} = 4//5/(1,5 + 3,5)$$

$$R_{eq(bc)} = 4//5/5$$

$$R_{eq(bc)} = \frac{20}{13}$$

$$R_{eq(bc)} = 1,54\Omega$$

□

Videoaula 3.6 (Sobre R_{eq} em circuitos com curto). Para mais informações sobre como calcular a resistência equivalente em circuitos com curtos acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/whNXYz5_N08



3.5 Divisores de tensão e de corrente

Algumas variáveis podem ser obtidas facilmente em alguns circuitos se são empregados os conceitos de *divisores de tensão e de corrente*, como mostrado nas seções a seguir.

3.5.1 Divisor de tensão

Considere um circuito, como mostrado na figura 3.17, com três resistências R_1 , R_2 e R_3 associadas em série, no qual é conhecido o valor da tensão entre os terminais da associação série U e não é conhecido o valor da corrente I . Se é solicitado que se calcule o valor da d.d.p. entre os terminais de cada resistência individualmente (U_1 , U_2 e U_3), então o procedimento conhecido pelo estudante até agora o obriga a encontrar o valor de I e assim poder calcular a d.d.p. nos terminais de cada resistência, usando as expressões: $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$ e $U_3 = R_3 I$.

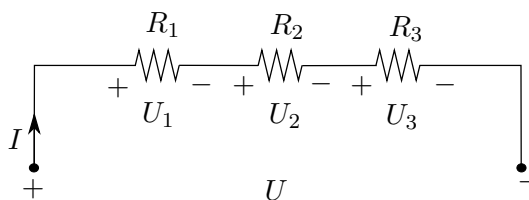


Figura 3.17: Circuito elétrico para análise do divisor de tensão.

Com a utilização do conceito de *divisor de tensão*, é possível calcular diretamente a d.d.p. nos terminais de cada resistência a partir do valor da tensão terminal da associação série sem o cálculo da corrente, como é descrito na sequência.

Inicialmente, calcula-se a d.d.p. U_1 , que pode ser encontrada com a expressão:

$$U_1 = R_1 I \quad (3.14)$$

A corrente que flui pela associação série e, portanto, por R_1 é:

$$I = \frac{U}{R_{eq}} \quad (3.15)$$

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.14), encontra-se que:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_{eq}} U \quad (3.16)$$

Neste caso específico já deve ser claro para o estudante que $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$. A análise da equação (3.16) permite concluir que o objetivo foi alcançado: encontrar uma expressão que permitisse o cálculo da tensão nos terminais de uma resistência que fizesse parte de uma associação série quando são conhecidos apenas os valores das resistências e da tensão nos terminais da associação. A seguir são deduzidas de maneira mais sucinta as expressões para a d.d.p. nos terminais de R_2 e R_3 .

$$\begin{aligned} U_2 &= R_2 I = R_2 \left(\frac{U}{R_{eq}} \right) = \frac{R_2}{R_{eq}} U \\ U_3 &= R_3 I = R_3 \left(\frac{U}{R_{eq}} \right) = \frac{R_3}{R_{eq}} U \end{aligned}$$

As expressões de divisor de tensão foram desenvolvidas para um caso específico com três resistências, porém o conceito é válido para uma associação com uma quantidade qualquer de resistências em série. Para um circuito temos que o valor da d.d.p. nos terminais da n -ésima resistência é:

$$U_n = \frac{R_n}{R_{eq}} U \quad (3.17)$$

Divisor de tensão com duas resistências em série

Um dos casos mais comuns de uso do divisor de tensão é para uma associação série de apenas duas resistências. Neste caso, usando a equação (3.17), a d.d.p. nos terminais de R_1 é:

$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I = R_1 \left(\frac{U}{R_{eq}} \right) \\ U_1 &= \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) U \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usando a equação (3.17), a d.d.p. nos terminais de R_2 é

$$\begin{aligned} U_2 &= R_2 I = R_2 \left(\frac{U}{R_{eq}} \right) \\ U_2 &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) U \end{aligned} \quad (3.19)$$

Exemplo 3.8. Calcule o valor da d.d.p. nos terminais da resistência de 15Ω do circuito da figura 3.18.

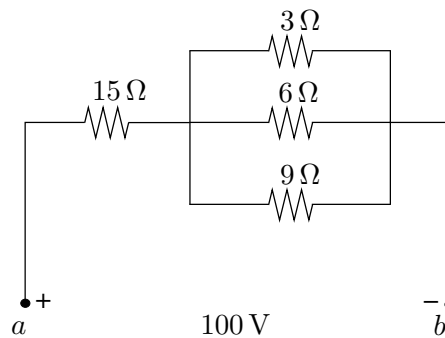


Figura 3.18: Circuito relativo ao exemplo 3.8

Solução:

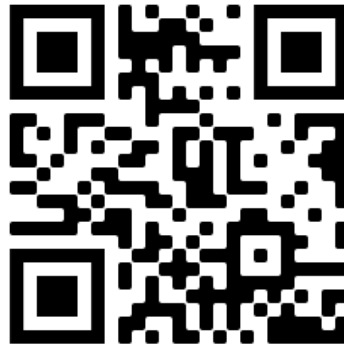
O conceito de divisor de tensão aplica-se apenas quando há resistências em série e é conhecida a d.d.p. nos terminais de toda a associação. Se é encontrado o valor de $3//6//9$ (que resulta no valor $1,5\Omega$), então tem-se duas resistências em série (a de 15Ω e a de $1,5\Omega$). Este é o caso particular descrito na seção imediatamente anterior e pode-se então usar a equação (3.18) e assim encontra-se:

$$U_{15\Omega} = \left(\frac{15}{15 + 1,5} \right) 100 = 90,91 \text{ V}$$

□

Videoaula 3.7 (Sobre o divisor resistivo de tensão). Para mais informações sobre como utilizar o divisor resistivo para cálculos de tensão em circuitos série acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/kPcJTt_dyVM



3.5.2 Divisor de corrente

Considere o circuito da figura 3.19(a) que possui três resistências, R_1 , R_2 e R_3 , em paralelo e que a intensidade da corrente I é conhecida. Se o valor da tensão entre os terminais a e b indicados na figura 3.19(a) é conhecido, as intensidades das correntes nas resistências são: $I_1 = U/R_1$, $I_2 = U/R_2$ e $I_3 = U/R_3$ (o estudante deve lembrar que em uma associação em paralelo as tensões em todas as resistências possuem mesmo valor). A seguir são desenvolvidas expressões para o cálculo de I_1 , I_2 e I_3 que empregam apenas os valores das resistências e da intensidade da corrente I .

Pode-se começar calculando o valor de I_1 :

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad (3.20)$$

Do circuito mostrado na figura 3.19(b), no qual foi encontrado o R_{eq} , vê-se que o valor da tensão U é:

$$U = R_{eq}I \quad (3.21)$$

Substituindo a equação (3.21) na equação (3.20), encontra-se:

$$I_1 = \frac{R_{eq}}{R_1}I \quad (3.22)$$

A análise da equação (3.22) evidencia que o objetivo foi alcançado, já que ela permite calcular o valor da corrente que atravessa uma única resistência, sabendo apenas os valores das resistências e

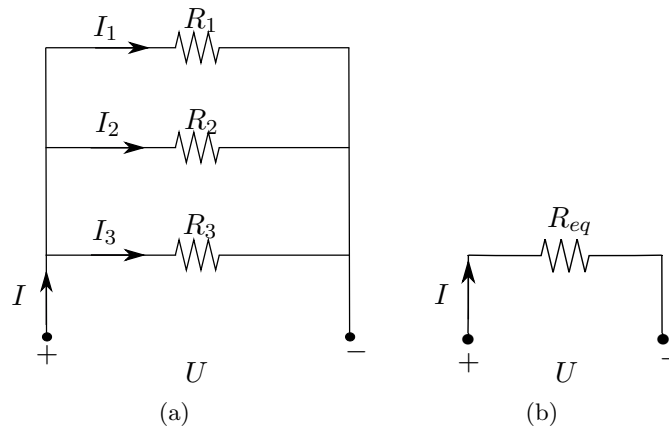


Figura 3.19: Circuito elétrico para análise do divisor de corrente.

da corrente total da associação em paralelo. As equações para divisor de corrente para I_2 e I_3 são deduzidas sucintamente a seguir:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{U}{R_2} = \frac{R_{eq}}{R_2} I \\ I_3 &= \frac{U}{R_3} = \frac{R_{eq}}{R_3} I \end{aligned}$$

Para uma associação em paralelo qualquer, encontra-se a intensidade da corrente que atravessa a n -ésima resistência com a expressão:

$$I_n = \frac{R_{eq}}{R_n} I \quad (3.23)$$

Divisor de corrente com duas resistências em paralelo

No caso particular de duas resistências associadas em paralelo, o valor de I_1 (usando a equação (3.23)) é:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{R_{eq}}{R_1} I = \left(\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{I}{R_1} \\ I_1 &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) I \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ainda usando a equação (3.23), o valor de I_2 é:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{R_{eq}}{R_2} I = \left(\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{I}{R_2} \\ I_2 &= \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) I \end{aligned} \quad (3.25)$$

Exemplo 3.9. Calcule a intensidade da corrente que atravessa a resistência de 3Ω do circuito da figura 3.20.

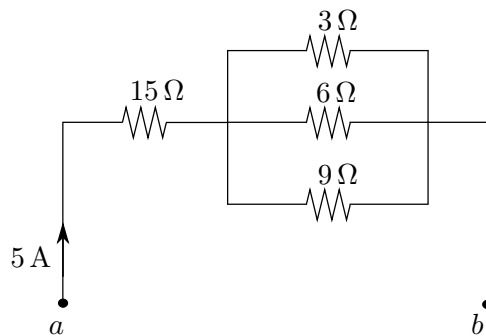


Figura 3.20: Circuito relativo ao exemplo 3.9

Solução:

Deve-se notar que o divisor de corrente aplica-se apenas quando há resistências em paralelo, assim sendo, no presente exemplo, o divisor será empregado desprezando a resistência de $15\ \Omega$ no cálculo do R_{eq} usado na expressão do divisor de corrente (equação (3.23), que é repetida a seguir por conveniência):

$$I_n = \frac{R_{eq}}{R_n} I$$

Para calcular a corrente que atravessa a resistência de $3\ \Omega$ é necessário calcular R_{eq} (lembrar que neste caso não é o R_{eq} entre os terminais a e b ; é o R_{eq} da associação em paralelo, no qual se deseja aplicar a expressão de divisor de corrente), que neste caso é:

$$R_{eq} = 3//6//9 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5\ \Omega$$

A corrente na resistência de $3\ \Omega$ é dada por:

$$I_{3\Omega} = \left(\frac{1,5}{3}\right) 5 = 2,5\ \text{A}$$

□

Videoaula 3.8 (Sobre o divisor resistivo de corrente). Para mais informações sobre como utilizar o divisor resistivo para cálculos de correntes em circuitos paralelos acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/l34nP3E0gI>



3.6 Resumo do capítulo

Até o capítulo anterior o estudante havia visto apenas circuitos com uma única resistência, mas agora ele também foi apresentado a circuitos com várias resistências associadas. Segue o resumo do capítulo:

- O conceito de resistência equivalente é utilizado para simplificar circuitos mais complexos, de tal maneira que a quantidade de resistências pode ser diminuída até chegar a uma única. Esta é exatamente aquela que consome uma potência equivalente àquela consumida por todas as resistências do circuito original;
- A simplificação de circuitos pode ser feita com a identificação das resistências que estão associadas em série ou em paralelo. Aquelas que estão em série podem ser substituídas por uma única, cujo valor é a soma do conjunto-série, enquanto que aquelas que estão em paralelo podem ser substituídas por uma única cujo inverso do valor é igual à soma dos inversos das resistências que formam o conjunto-paralelo;
- Quando em um mesmo circuito há resistências associadas em série e em paralelo, diz-se que há associação mista. A simplificação é feita utilizando as associações em série e em paralelo, até encontrar R_{eq} ;
- A resistência equivalente depende dos terminais que estão sendo levados em consideração e, dessa maneira, o estudante deve identificar claramente que terminais ele utilizará para realizar a simplificação;
- O curto-circuito é um caminho de menor resistência à passagem de corrente. No caso do curto-circuito ser feito por um fio ideal, então todas as resistências que estão ligadas pelos terminais do fio ideal podem ser eliminadas da representação do circuito e assim a análise é simplificada;
- O divisor de tensão é utilizado para calcular o valor da tensão de resistências em série enquanto o divisor de corrente é utilizado para se calcular a intensidade da corrente de resistências em paralelo.

Problemas propostos

Problema 3.1. Calcule a corrente que atravessa a bateria de 120 V que alimenta os circuitos da figura 3.21.

Problema 3.2. Calcule as resistências equivalentes solicitadas nos circuitos da figura 3.22.

Problema 3.3. Calcule as resistências equivalentes solicitadas nos circuitos da figura 3.23.

Problema 3.4. Calcule a potência dissipada pelo conjunto de resistores, representados por resistências nos circuitos da figura 3.24, se uma fonte de tensão de 127 V alimenta-os:

- (a) Pelos terminais a e b ;
- (b) Pelos terminais a e c ;
- (c) Pelos terminais b e c .

Problema 3.5. Encontre nos circuitos da figura 3.25 os valores das grandezas elétricas indicadas com uma interrogação. Encontre também, para todas as resistências, a potência consumida por cada uma delas.

Problema 3.6. Lâmpadas incandescentes que podem operar adequadamente com tensão entre 110 V e 127 V¹ são usadas em um experimento. Considere que todas as lâmpadas são idênticas. Responda: para cada circuito da figura 3.26, quais são as lâmpadas que operam adequadamente?

Problema 3.7. Considere que há em um local 10 lâmpadas disponíveis, das quais cinco foram entregues ao técnico 1 e as outras cinco ao técnico 2. Estas lâmpadas operam com boa luminosidade se ligadas a uma fonte de tensão de 127 V. Se a tensão entre os seus terminais diminui, então a luminosidade também diminui. O técnico 1 conecta as lâmpadas em paralelo e as liga a uma fonte que fornece uma d.d.p. de 127 V e o técnico 2 conecta as lâmpadas em série e as liga a mesma fonte que fornece 127 V. Responda:

- O que acontece com a luminosidade das lâmpadas nas duas situações descritas?
- Quais os valores de potência de cada uma das lâmpadas se os seus valores especificados são: 127 V e 60 W?
- Se ao invés de conectar cinco lâmpadas cada técnico conectasse apenas duas lâmpadas, o que ocorreria com a luminosidade nas associações série e paralelo?

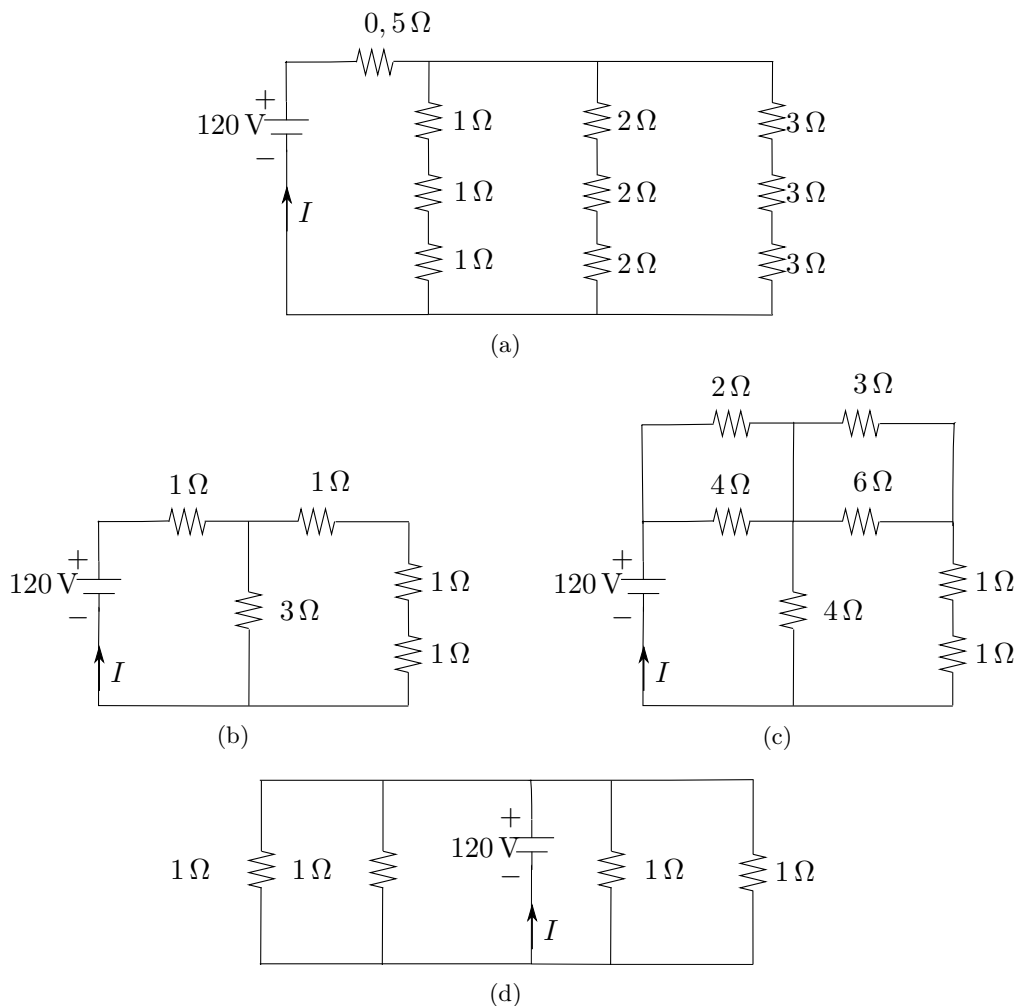


Figura 3.21: Corrente I desconhecida.

¹Considere que para estas lâmpadas, valores abaixo de 110 V fazem as lâmpadas terem luminosidade insuficiente e acima de 127 V fazem com que as mesmas tenham vida útil reduzida, queimando seu filamento em um curto período de uso.

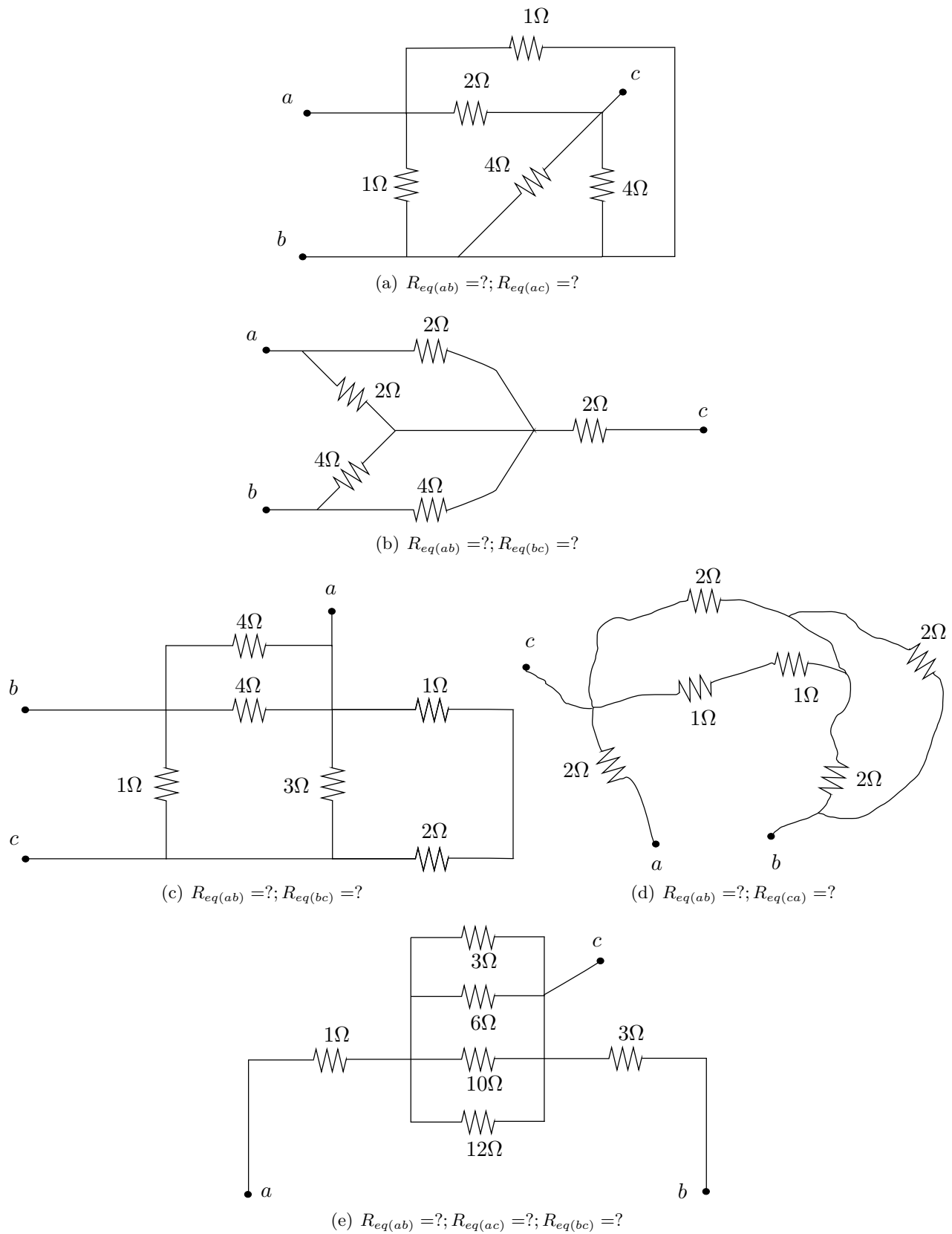


Figura 3.22: Circuitos para cálculos de R_{eq} .

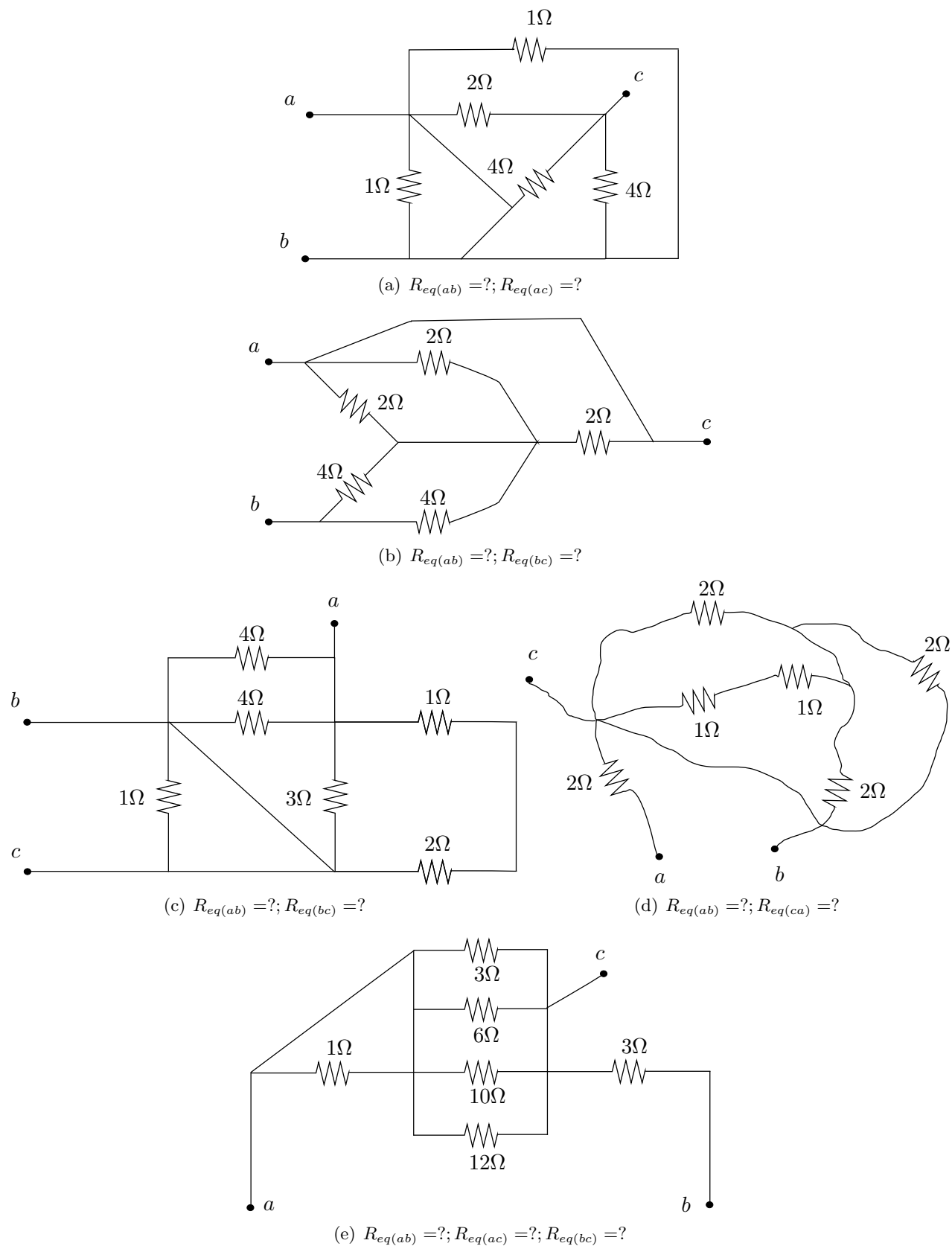


Figura 3.23: Circuitos para cálculos de R_{eq} .

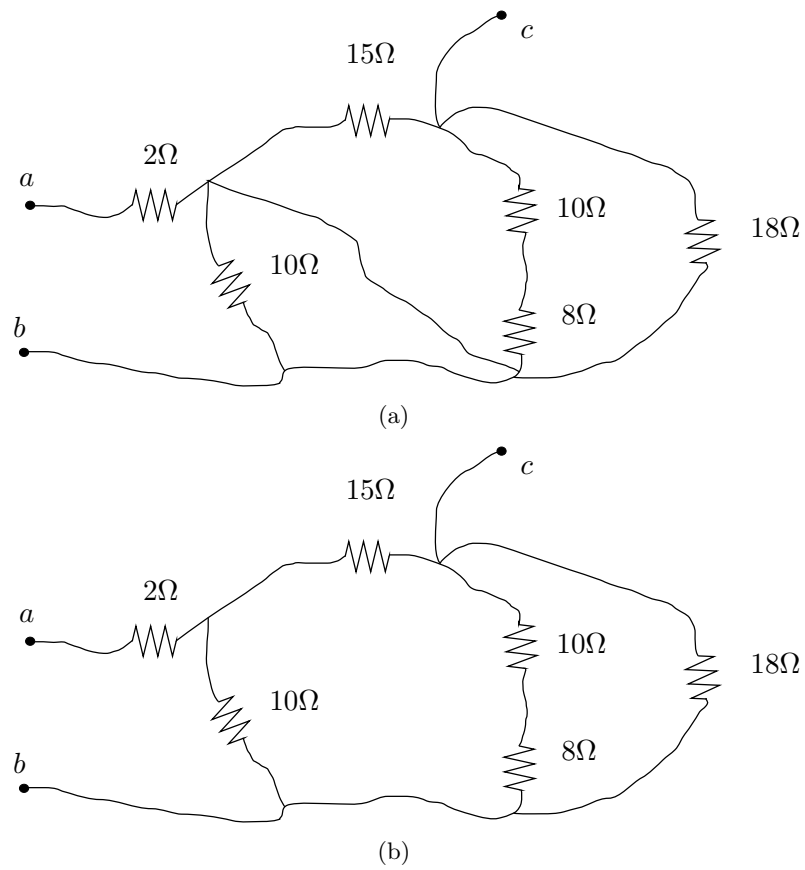


Figura 3.24: Circuitos para cálculos de R_{eq} .

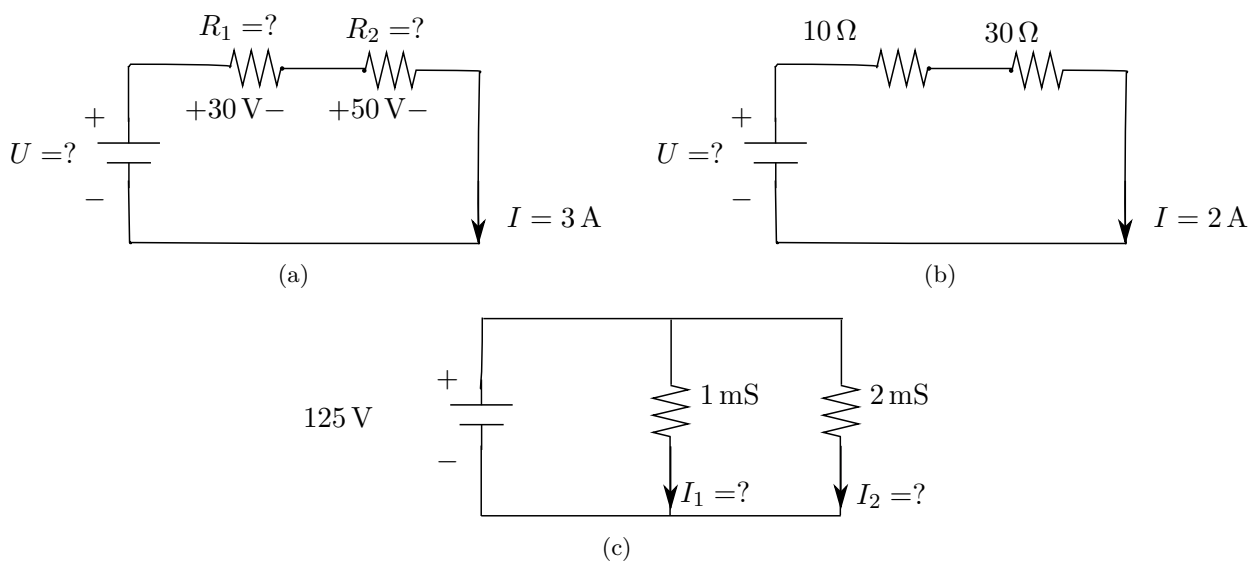


Figura 3.25: Circuitos com grandezas elétricas desconhecidas.

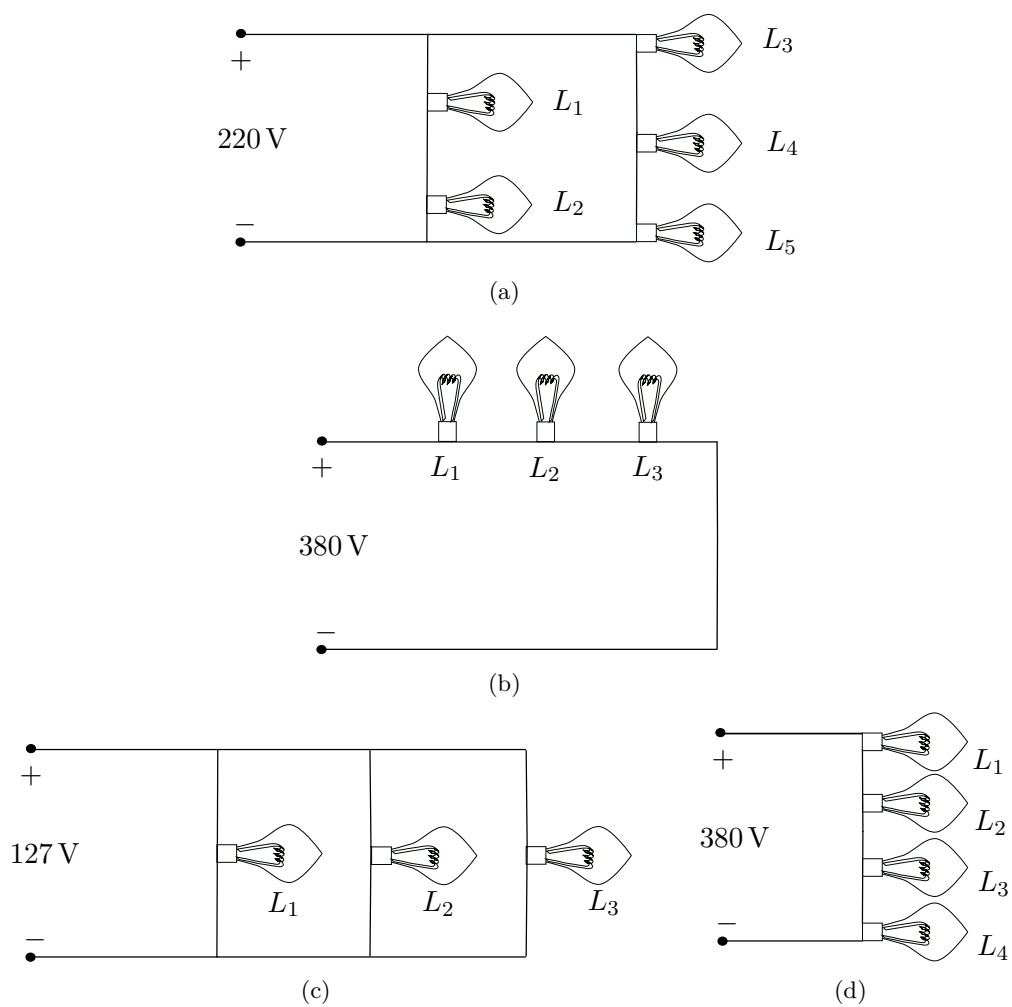


Figura 3.26: Circuitos compostos por lâmpadas incandescentes.

Capítulo 4

Aparelhos medidores de grandezas elétricas

4.1 Introdução

Em circuitos elétricos reais são utilizados medidores para se conhecer os valores das grandezas elétricas. O presente capítulo mostra como os medidores são representados nos circuitos e as grandezas que mensuram, mas não traz detalhes sobre suas construções, ainda que breves comentários sobre os tipos analógico e digital sejam feitos. Os conceitos apresentados no presente capítulo ajudam no entendimento das medições de tensão, corrente, resistência e potência elétrica. Saliente-se que as definições, conceitos e cálculos se referem ainda ao universo das tensões e correntes contínuas.

4.2 Medidores analógico e digital

Sabe-se que um ímã atrai um pedaço de metal ou, dizendo de maneira diferente e mais detalhada, que a região em torno de um ímã possui um campo magnético que gera uma força de atração em relação a um pedaço de alguns tipos de metais, sendo esta força cada vez maior quando a distância entre o ímã e o pedaço de metal diminui. Um fio sendo percorrido por uma corrente também gera ao seu redor um campo magnético. Estas forças podem ser calculadas com uma modelagem precisa dos dispositivos elétricos, de tal maneira que elas façam um ponteiro se mover em frente a uma indicação de escala numérica. O valor mostrado pode corresponder ao valor de tensão, corrente, potência ou resistência. É com base nestes princípios que operam os *medidores analógicos*. A figura 4.1(a) mostra um medidor analógico.

Os *medidores digitais* utilizam também o conhecimento de fenômenos físicos para encontrar o valor de algumas grandezas, porém, assim como um computador, eles podem fazer cálculos e utilizar suas memórias internas. Desta maneira, o *instrumento de medição digital* pode oferecer funções como a modificação do fundo de escala, mostrar no *display* o valor de mais de uma grandeza, calcular o valor de uma grandeza a partir dos valores de outras guardadas na memória, construir gráficos de várias medições, armazenar na memória valores e gráficos etc. A figura 4.1(b) mostra um medidor digital.

Atualmente, os *instrumentos de medição analógicos* são encontrados apenas em instituições que ainda não tiveram como renovar seus equipamentos de medição, pois a quase totalidade dos medidores fabricados atualmente é do tipo digital.

4.3 Amperímetro

O *amperímetro* é o instrumento de medição utilizado para medir a corrente e deve sempre ser instalado em série com outros dispositivos, de tal maneira que a corrente que se deseja medir o atravessasse. A figura 4.2(a) mostra o símbolo e a figura 4.2(b) mostra como o amperímetro é conectado

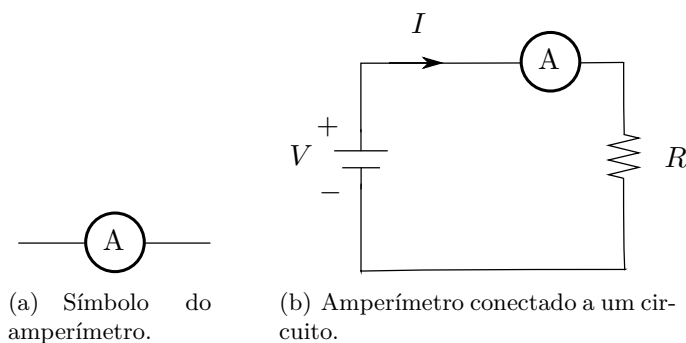


(a) Medidor analógico. Pela indicação da unidade watt, nota-se que é um medidor de potência.



(b) Medidor digital. É possível medir várias grandezas elétricas com este medidor e este tipo é chamado de multímetro.

Figura 4.1: Instrumentos de medição analógico e digital.



(a) Símbolo do amperímetro.

(b) Amperímetro conectado a um circuito.

Figura 4.2: Ilustrações referentes ao amperímetro.

na medição da corrente de um circuito simples¹.

É necessário salientar que qualquer instrumento de medição não deve influenciar nos valores de tensão, corrente ou potência de um circuito, portanto, o *amperímetro ideal* possui resistência interna nula. Obviamente, na prática não se consegue obter um amperímetro perfeito, porém o valor da resistência interna de um bom amperímetro é desprezível e pode-se aproximar seu valor para zero na maioria das situações.

Exemplo 4.1. Qual é o valor da corrente medida pelo amperímetro representado no circuito da figura 4.3?

Solução:

Vê-se que o amperímetro mede apenas a corrente que circula pela resistência de $16\ \Omega$ ($I_{16\Omega}$). Como

¹O amperímetro tem dois terminais e o sentido da corrente deve ser levado em consideração no instante da sua conexão ao circuito. Se a corrente entra pelo terminal indicado com + (geralmente o terminal de cor vermelha) e sai pelo terminal – (geralmente o terminal de cor preta), então o valor é indicado como positivo no *display* do amperímetro digital; porém se a ligação foi feita de maneira que a corrente entre pelo terminal – e saia pelo +, então a corrente é indicada com valor negativo. Na sequência desta seção a questão da polaridade do amperímetro não é tratada, pois o estudante estudará isto no capítulo 6 e em livros de medidas elétricas.

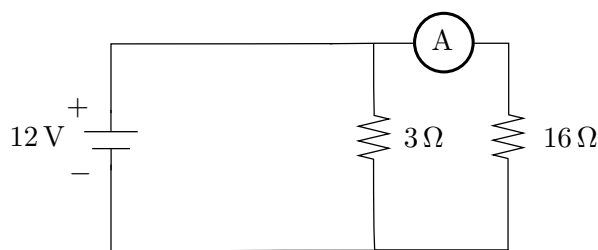


Figura 4.3: Circuito elétrico referente ao exemplo 4.1.

ambas estão em paralelo, então a tensão na citada resistência é a mesma da fonte. Portanto, a corrente medida pelo amperímetro I_{amp} vale:

$$I_{amp} = I_{16\Omega} = \frac{12}{16} = 0,75 \text{ A}$$

□

4.4 Voltímetro

O *voltímetro* é o instrumento de medição utilizado para medir a d.d.p. (tensão) entre dois pontos de um circuito. Ele deve sempre ser instalado em paralelo, de maneira que os seus terminais estejam ligados aos pontos entre os quais se deseja saber o valor da d.d.p. A figura 4.4(a) mostra o símbolo e a figura 4.4(b) mostra como o voltímetro é conectado na medição da d.d.p. nos terminais de uma resistência de um circuito simples².

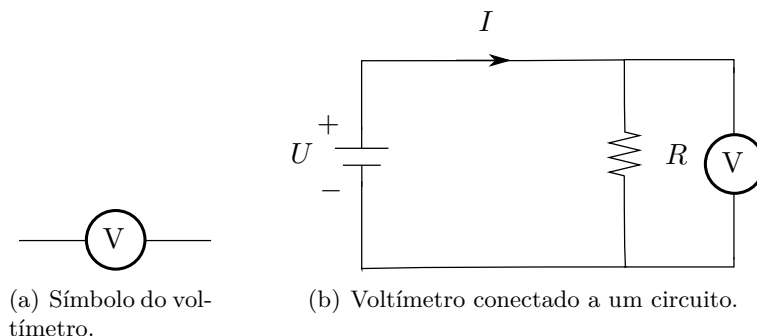


Figura 4.4: Ilustrações referentes ao voltímetro.

Como o voltímetro não deve influenciar em nenhuma grandeza elétrica do circuito, ele idealmente possui resistência interna infinita, ou seja, o *voltímetro ideal* opera como se fosse um circuito aberto e nenhuma corrente passa por ele. Na prática os voltímetros possuem um valor enorme de resistência interna, de tal maneira que é possível aproximar seu comportamento pelo de um voltímetro ideal.

Exemplo 4.2. Qual é o valor da d.d.p. medida pelo voltímetro representado no circuito da figura 4.5?

Solução:

O voltímetro mede apenas a d.d.p. nos terminais da resistência de 16Ω ($U_{16\Omega}$). Para calcular o valor deste d.d.p. pode-se usar a teoria de divisor de tensão, explicada com detalhes na seção 3.5.1.

²Assim como no caso da conexão do amperímetro, na ligação do voltímetro no circuito ainda não é dada importância à polaridade (se o *display* mostra um valor negativo ou positivo de tensão), e sim, a magnitude. A avaliação da polaridade é melhor entendida depois do estudante estudar o capítulo 6.

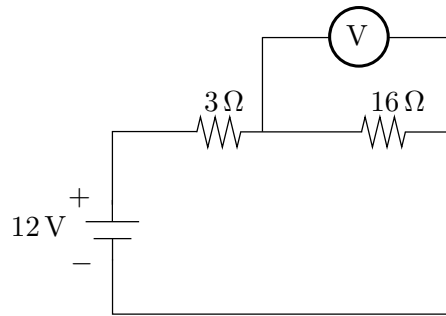


Figura 4.5: Circuito elétrico referente ao exemplo 4.2.

Assim tem-se que a tensão medida pelo voltímetro U_{vol} vale:

$$U_{vol} = U_{16\Omega} = \left(\frac{16}{16 + 3} \right) 12 = \frac{192}{19} = 10,11 \text{ V}$$

□

4.5 Ohmímetro

O *ohmímetro* é o instrumento de medição utilizado para se obter o valor da resistência entre dois terminais de um circuito. Ele deve ser utilizado em paralelo, de maneira que os seus terminais estejam ligados aos pontos entre os quais se deseja saber o valor da resistência. A figura 4.6 mostra como o ohmímetro é conectado na medição da resistência de um dispositivo (representado no circuito por uma resistência) de um circuito simples. Os dois dispositivos do ohmímetro que tocam nos pontos do circuito são chamados de *pontas de prova*. Note que na representação do circuito (figura 4.6) foi retirada a fonte. É que o dispositivo que se deseja saber a resistência não deve estar alimentado, pois o funcionamento do ohmímetro consiste em aplicar um pequeno valor de tensão U , medir o valor da corrente I e posteriormente calcular a relação $R = U/I$. Este valor é mostrado para o operador no *display* do medidor. Portanto, não deve haver outra tensão que não a aplicada pelo ohmímetro, pois a leitura seria errada já que seria influenciada pela tensão da fonte.

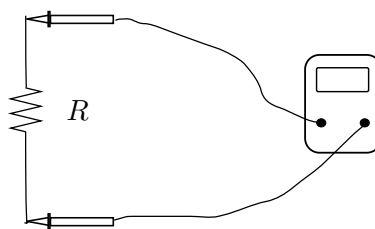


Figura 4.6: Ohmímetro conectado a um circuito.

Depois de feita a leitura da resistência, o ohmímetro deve ser desconectado do circuito, para que ele não influencie na operação dos equipamentos em uso.

Exemplo 4.3. Qual é o valor da resistência medida pelo ohmímetro representado no circuito da figura 4.7?

Solução:

O estudante deve ficar atento aos terminais em que estão conectadas as pontas de prova do ohmímetro. Na figura 4.7 elas estão conectadas de maneira que meçam apenas os valores das resistências de 2Ω e 3Ω ligadas em série, portanto, o valor lido no ohmímetro será 5Ω . Percebe-se que o pequeno

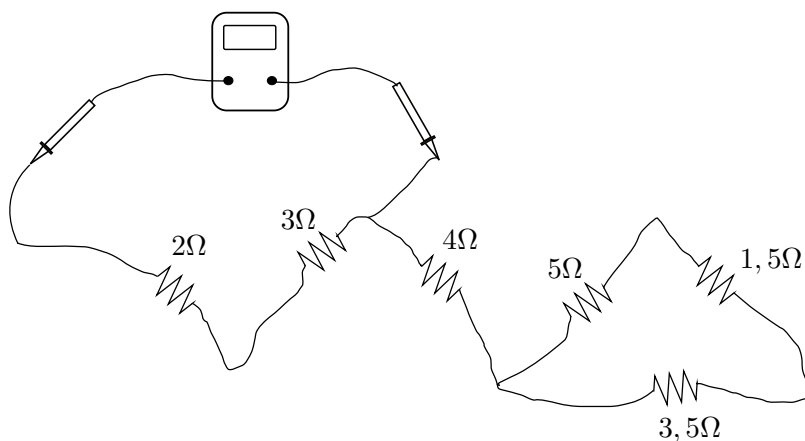


Figura 4.7: Circuito elétrico referente ao exemplo 4.3

valor de tensão aplicada pelo ohmímetro faz circular corrente apenas pelas duas resistências de 2Ω e 3Ω . Notar que é necessário identificar os terminais aos quais as pontas de prova do ohmímetro estão conectadas e encontrar a resistência equivalente vista a partir destes terminais, como explicado na seção 3.3.

□

4.6 Wattímetro

O *wattímetro* é o instrumento de medição utilizado para medir o valor da potência. A expressão da potência é $P = UI$, portanto, é necessário que o wattímetro realize as medições da d.d.p. (U) e da corrente I , para que seja feita a multiplicação destas duas grandezas. O símbolo do wattímetro é mostrado na figura 4.8(a) e a sua representação na medição da potência elétrica consumida por uma resistência é mostrada na figura 4.8(b). Note que o wattímetro possui três terminais, para que seja feita uma conexão em série (para medir a corrente) e outra em paralelo (para medir a d.d.p.). A figura 4.8(c) ilustra como opera internamente um wattímetro e nesta figura fica evidente o motivo da necessidade dos três terminais, já que internamente há um amperímetro e um voltímetro³.

O *wattímetro ideal* é aquele que não influencia nas grandezas do circuito, pois possui um amperímetro interno de resistência nula e um voltímetro interno de resistência infinita. Ainda que no mundo real não exista este tipo de aparelho, a suposição de que o wattímetro se comporta como um dispositivo ideal é válida na maiorias das aplicações se um bom equipamento é utilizado.

Exemplo 4.4. Qual é o valor da potência medida pelo wattímetro representado no circuito da figura 4.9?

Solução:

O valor da tensão no terminais da resistência é de 15 V e a corrente que a atravessa é:

$$I = \frac{15}{3} = 5\text{ A}$$

Portanto, a potência medida terá o valor de:

$$P = UI = 15 \times 5 = 75\text{ W}$$

□

³Mais uma vez vale a pena destacar que não é dado destaque neste livro às polaridades de ligação dos três terminais do wattímetro.

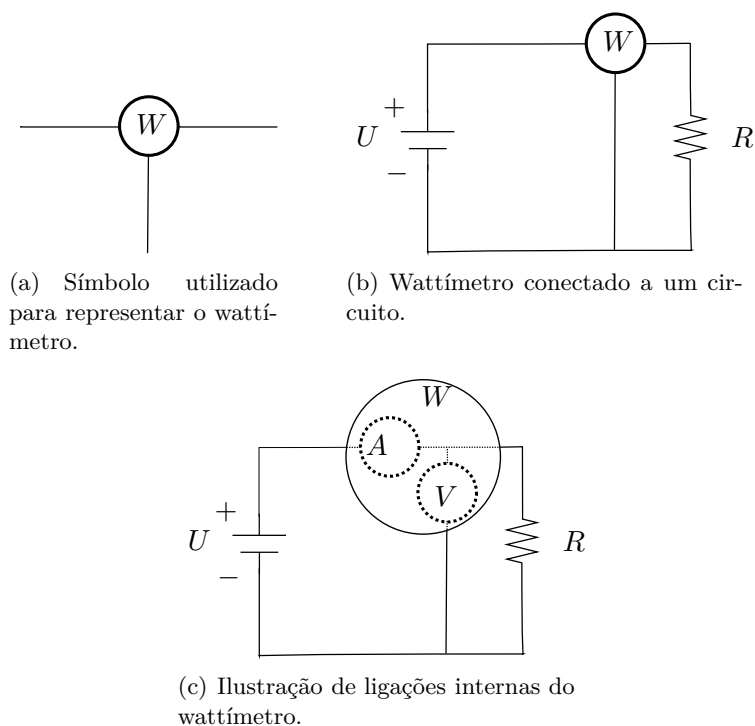


Figura 4.8: Ilustrações referentes ao wattímetro.

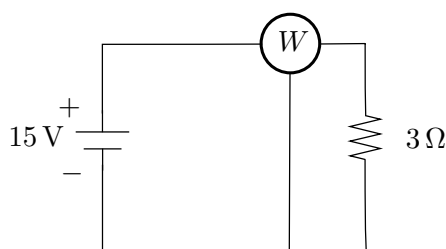


Figura 4.9: Circuito elétrico referente ao exemplo 4.4.

4.7 Multímetro

O *multímetro* é o dispositivo que mede mais de uma grandeza elétrica. Atualmente, mesmo os multímetros mais simples podem operar como amperímetro, voltímetro, wattímetro e ohmímetro. Portanto, é necessário deixar claro que função está selecionada no multímetro para que não haja dúvidas quanto a grandeza elétrica que ele está medindo. A figura 4.10 mostra um multímetro analógico e o estudante mais observador pode notar que é possível selecionar medições de corrente contínua em miliampères (DCmA), tensão alternada (ACV) ou contínua (DCV) e faixa de valores de resistências (Ω).

Atualmente alguns multímetros digitais são tão sofisticados que além de mostrar no *display* os valores de tensão, corrente, resistência, entre outras, permite também realizar testes em capacitores, diodos, entre outros dispositivos. Os modelos mais caros também mostram as formas de ondas das grandezas medidas e ainda permitem avaliar os sinais fazendo análises de frequências⁴, valores médios, etc. Muitas vezes os fabricantes nem mesmo chamam estes dispositivos mais caros de multímetros, pois a função de mostrar a forma de onda é comum aos osciloscópios e a de análises de sinais aos

⁴Aqueles que se dedicarem aos estudos mais aprofundados de eletricidade verão que um sinal periódico pode ser representado por um somatório de ondas senoidais de magnitudes e frequências diferentes.



Figura 4.10: Foto de um multímetro.

medidores de qualidade de energia: cada fabricante dá seu nome ao seu produto.

Videoaula 4.1 (Sobre medição em circuitos CC). Para mais informações sobre como as grandezas elétricas são medidas acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/bt24_6AbROU



4.8 Resumo do capítulo

São apresentadas a seguir as principais características dos equipamentos tratados no decorrer do presente capítulo:

- Os medidores digitais permitem configurações diversas para mostrar valores e utilizar dados armazenado em memória para cálculos de outras grandezas. Os medidores analógicos se limitam a mostrar os valores obtidos no seu mostrador;
- O amperímetro deve ser posto em série com o dispositivo em que se está medindo a corrente. Um bom amperímetro possui resistência interna insignificante sendo idealmente nula;
- O voltímetro mede a tensão e, portanto, deve ser posto em paralelo com o dispositivo que se deseja saber o valor da d.d.p. Um bom voltímetro possui resistência interna muito elevada sendo idealmente infinita;
- O wattímetro mede a potência de um dispositivo. O medidor possui três terminais os quais são ligados para se medir a corrente e a tensão para que internamente seja feita a multiplicação destas grandezas, afinal $P = UI$;
- O ohmímetro mede o valor de resistência e deve ser ligado ao dispositivo quando este estiver desenergizado, pois o aparelho aplica um valor baixo de tensão, mede a corrente e faz a relação U/I para encontrar o valor da resistência;
- Multímetro é o nome dado ao instrumento que mede mais de uma grandeza.

Problemas propostos

Problema 4.1. Determine os valores lidos nos ohmímetros que foram conectados nos circuitos elétricos mostrados na figura 4.11.

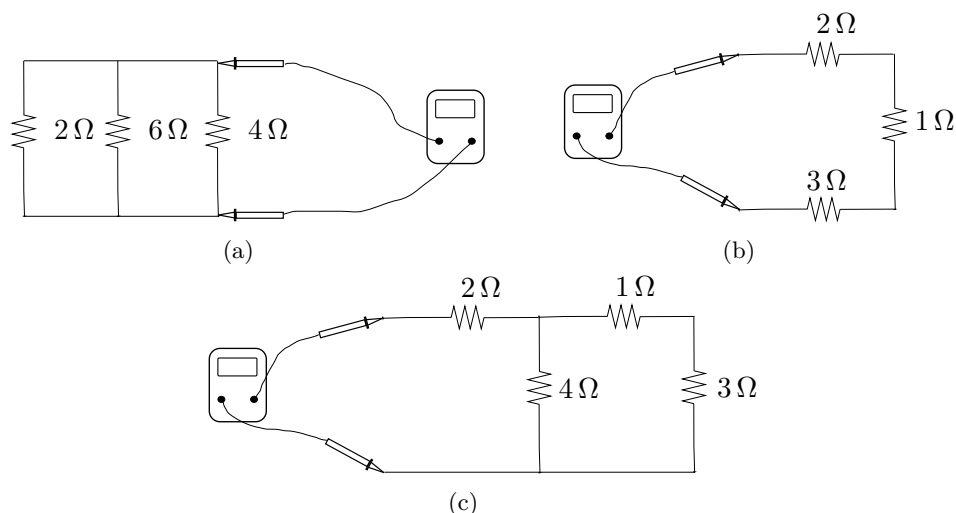


Figura 4.11: Ilustrações referentes ao problema 4.1.

Problema 4.2. Encontre nos circuitos elétricos da figura 4.12 os valores de corrente e tensão lidos pelos amperímetros e voltímetros. Encontre também os valores de R_1 , R_2 e U_1 .

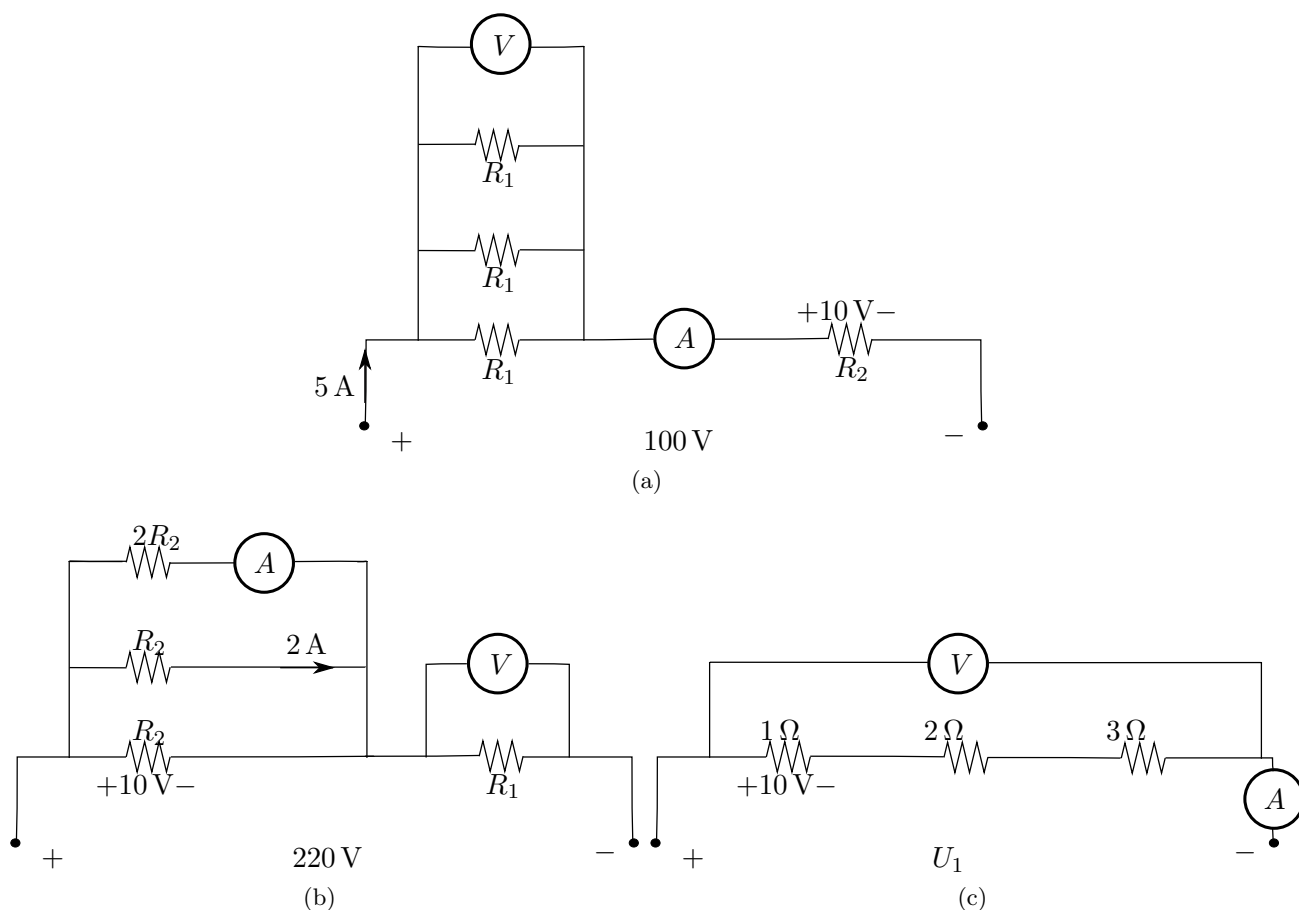


Figura 4.12: Circuitos com amperímetros e voltímetros. Ilustrações relativas ao problema 4.2.

Problema 4.3. Determine os valores lidos nos wattímetros que foram conectados nos circuitos elétricos mostrados na figura 4.13.

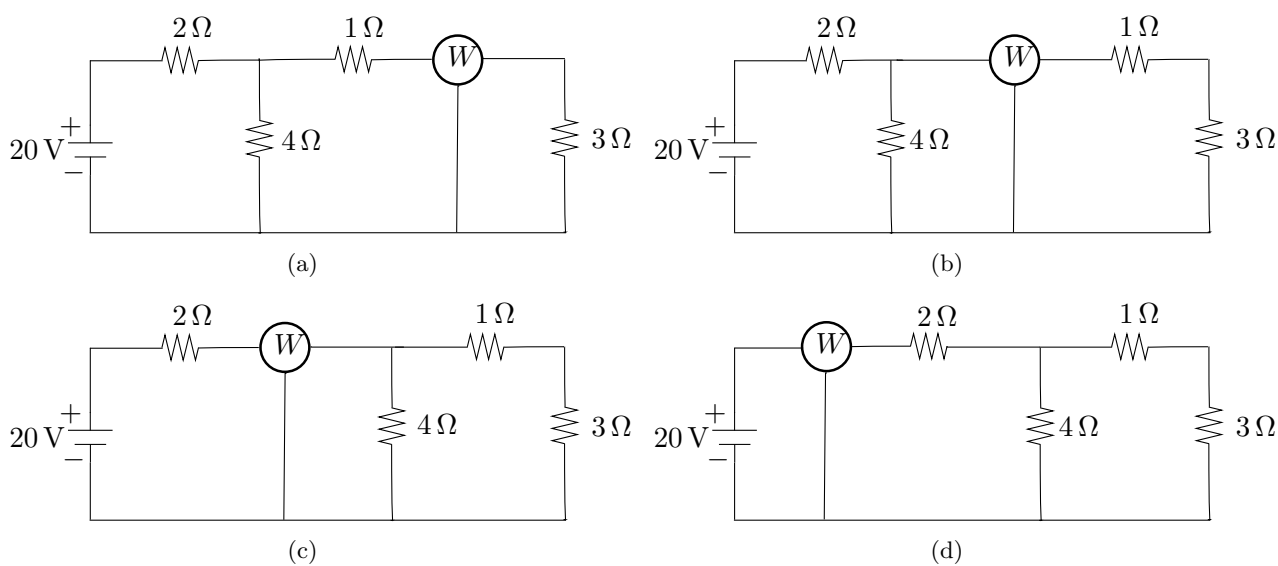


Figura 4.13: Ilustrações referentes ao problema 4.3.

Capítulo 5

Solução de sistemas de equações lineares

5.1 Introdução

Uma das principais dificuldades de estudantes de escolas técnicas, quando são apresentados ao método de análise de malhas para encontrar os valores das correntes elétricas (capítulo 6), é a resolução de um sistema de equações lineares, conteúdo que é brevemente explicado no decorrer deste capítulo. Saliente-se que são tratados apenas os casos de sistemas lineares cuja solução seja possível e determinada. Se o estudante desejar adquirir um conhecimento mais aprofundado a respeito da teoria de sistemas lineares deve procurar livros de matemática que contenham este conteúdo. No caso do estudante universitário é conveniente ver a indicação da videoaula 5.2 (página 85) sobre o método de Cramer para solução de sistemas, pois é um método matricial que pode ser muito conveniente, porém este conteúdo não é tratado no presente texto.

5.2 Conceitos de sistemas de equações lineares

Um sistema de duas equações lineares e duas variáveis possui a forma a seguir, já apresentada com um exemplo numérico:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 36 \\ 5x - 4y = -14 \end{cases} \quad (5.1)$$

O estudante deve notar que há na equação (5.1) duas variáveis que foram nomeadas de x e y . Os símbolos utilizados para representar as variáveis são irrelevantes e podem ser escolhidos a gosto. Portanto, ao invés do par de variáveis x e y pode-se utilizar, por exemplo, o par A e B ou o par I_1 e I_2 .

Um estudo mais detalhado de sistemas lineares mostra que nem todos possuem solução, porém, em todos os casos tratados neste livro os sistemas possuem solução. Um sistema linear com duas equações e duas incógnitas possui como solução um par de números reais. Assim, o sistema mostrado na equação (5.1) tem como solução os números $x = 2$ e $y = 6$. A prova de que estes dois números são de fato as soluções do sistema é facilmente compreendida se eles forem substituídos nas equações, como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} 3(2) + 5(6) = 36 \\ 5(2) - 4(6) = -14 \end{cases}$$

Efetuando as contas:

$$\begin{cases} 6 + 30 = 36 \\ 10 - 24 = -14 \end{cases}$$

Finalmente são encontrados os valores:

$$\begin{cases} 36 = 36 \\ -14 = -14 \end{cases}$$

A igualdade é verdadeira e, portanto, os números $x = 2$ e $y = 6$ solucionam o sistema. Se qualquer outro par de números for substituído a igualdade não será satisfeita. Por exemplo, os números $x = 3$ e $y = 4$ não são soluções, como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} 3(3) + 5(4) = 36 \\ 5(3) - 4(4) = -14 \end{cases}$$

Desenvolvendo as contas encontra-se como resultado final:

$$\begin{cases} 29 = 36 \\ -1 = -14 \end{cases} \quad (5.2)$$

A equação (5.2) está completamente errada, pois a igualdade não é verdadeira. A forma correta de escrevê-la é:

$$\begin{cases} 29 \neq 36 \\ -1 \neq -14 \end{cases}$$

O símbolo matemático $\neq$ deve ser lido como “diferente”, deixando claro que 29 é diferente de 36 e que -1 é diferente de -14 . Se a igualdade não é satisfeita quando são substituídos um par de números, então este par não é a solução do sistema. Obviamente, não é possível substituir todos os pares de números para encontrar a resposta, por isso são descritos na próxima seção três métodos para encontrar a solução de um sistema linear de equações.

5.3 Métodos de solução de sistemas de equações lineares

Os três métodos tratados neste capítulo são:

1. *Método da substituição*;
2. *Método da igualdade*;
3. *Método da adição*.

Todos os três métodos podem solucionar qualquer sistema de equações lineares e a escolha de qual se deve utilizar fica a gosto do estudante. É necessário salientar que seja qual for o método, a solução é a mesma. Isto ficará evidente nos exemplos 5.1, 5.2 e 5.3 que mostram como solucionar o mesmo sistema de três formas diferentes.

5.3.1 Método da substituição

Considere um sistema de duas equações e duas incógnitas denominadas x_1 e x_2 . O método da substituição consiste em:

1. Isolar uma das incógnitas do sistema em uma das equações. Por exemplo, x_1 ;
2. Substituir a variável isolada (x_1) na outra equação e, assim, encontrar o valor da outra variável, que no caso é x_2 ;
3. O valor de x_1 é obtido substituindo-se o valor de x_2 , encontrado no item anterior, em qualquer uma das equações do sistema.

O exemplo 5.1 mostra um caso de solução de um sistema de equações lineares empregando o método da substituição.

Exemplo 5.1. Encontre os valores de x_1 e x_2 se elas são incógnitas do sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = -7 \\ 2x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases}$$

Solução:

Para que a solução fique clara ao estudante, as equações $4x_1 + 2x_2 = -7$ e $2x_1 + 5x_2 = 3$ serão chamadas de primeira e segunda equações do sistema, respectivamente.

1. Isola-se a incógnita x_1 na primeira equação:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= -7 \\ 4x_1 &= -7 - 2x_2 \\ x_1 &= \frac{-7 - 2x_2}{4} \end{aligned} \quad (5.3)$$

2. Substitui-se o valor de x_1 (equação (5.3)) na segunda equação do sistema e assim encontra-se:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 2\left(\frac{-7 - 2x_2}{4}\right) + 5x_2 &= 3 \\ \left(\frac{-7}{2} - x_2\right) + 5x_2 &= 3 \\ -x_2 + 5x_2 &= 3 + \frac{7}{2} \\ -x_2 + 5x_2 &= \frac{6 + 7}{2} \\ 4x_2 &= \frac{13}{2} \\ x_2 &= \frac{13}{8} \end{aligned}$$

3. O valor da incógnita x_1 pode ser encontrado substituindo-se o valor de x_2 em qualquer equação do sistema, como, por exemplo, a equação (5.3), que é a primeira equação. Substituindo $x_2 = 13/8$ na equação (5.3), encontra-se:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-7 - 2x_2}{4} \\ x_1 &= \frac{-7 - 2(13/8)}{4} \\ x_1 &= \frac{-7 - 13/4}{4} \\ x_1 &= \frac{(-28 - 13)/4}{4} \\ x_1 &= \frac{-41/4}{4} \\ x_1 &= \frac{-41}{16} \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema linear dado é formado pelo par $x_1 = -41/16$ e $x_2 = 13/8$.

□

5.3.2 Método da igualdade

Neste método o estudante deve isolar a mesma variável nas duas equações que formam o sistema e depois igualar os seus valores. O exemplo 5.2 auxiliará no entendimento do método.

Exemplo 5.2. Resolva o sistema de equações do exemplo 5.1 empregando o método da igualdade.

Solução:

O sistema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = -7 \\ 2x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases}$$

Para que a solução fique claro ao estudante as equações $4x_1 + 2x_2 = -7$ e $2x_1 + 5x_2 = 3$ serão chamadas de primeira e segunda equações do sistema, respectivamente.

Deve-se escolher qualquer uma das variáveis para ser isolada em ambas as equações. Sendo escolhida a variável x_2 , o procedimento para isolá-la na primeira equação é:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= -7 \\ 2x_2 &= -7 - 4x_1 \\ x_2 &= \frac{-7 - 4x_1}{2} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Na segunda equação o procedimento para isolar a variável x_2 é:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 5x_2 &= 3 - 2x_1 \\ x_2 &= \frac{3 - 2x_1}{5} \end{aligned} \tag{5.5}$$

O próximo passo é igualar os valores de x_2 das equações (5.4) e (5.5), como é feito a seguir:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2 \\ \frac{-7 - 4x_1}{2} &= \frac{3 - 2x_1}{5} \\ 5(-7 - 4x_1) &= 2(3 - 2x_1) \\ -35 - 20x_1 &= 6 - 4x_1 \\ -20x_1 + 4x_1 &= 6 + 35 \\ -16x_1 &= 41 \\ x_1 &= \frac{-41}{16} \end{aligned}$$

Encontrado o valor de x_1 , basta substituí-lo em qualquer uma das equações para encontrar o valor de x_2 . As equações (5.4) e (5.5) já estão com os valores de x_2 isolados e facilitam as contas. Escolhendo a equação (5.4) para substituir o valor de $x_1 = -41/16$, encontramos:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{-7 - 4x_1}{2} \\
 x_2 &= \frac{-7 - 4(-41/16)}{2} \\
 x_2 &= \frac{-7 - (-41/4)}{2} \\
 x_2 &= \frac{-7 + (41/4)}{2} \\
 x_2 &= \frac{(-28 + 41)/4}{2} \\
 x_2 &= \frac{(13/4)}{2} \\
 x_2 &= \frac{13}{8}
 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema linear dado é formado pelo par $x_1 = -41/16$ e $x_2 = 13/8$.

□

5.3.3 Método da adição

O método da adição consiste em somar as duas equações do sistema de maneira que uma das incógnitas seja eliminada e para isto é necessário tornar os coeficientes de uma das incógnitas opostos (iguais em módulo e com sinais trocados) em ambas as equações do sistema, como mostrado no exemplo 5.3.

Exemplo 5.3. Resolva o sistema de equações do exemplo 5.1 empregando o método da adição.

Solução:

O sistema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = -7 \\ 2x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases}$$

Para que a solução fique clara ao estudante as equações $4x_1 + 2x_2 = -7$ e $2x_1 + 5x_2 = 3$ serão chamadas de primeira e segunda equações do sistema, respectivamente.

Deve-se somar as duas equações do sistema a fim de eliminar uma das incógnitas. O estudante pode notar que se a segunda equação do sistema for multiplicada por -2 a incógnita x_1 é eliminada. Portanto:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = -7 \\ (2x_1 + 5x_2 = 3) \times (-2) \end{cases}$$

Resultando em:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = -7 \\ -4x_1 - 10x_2 = -6 \end{cases}$$

Fazendo a soma das equações do sistema, encontra-se:

$$\begin{cases} + & 4x_1 + 2x_2 = -7 \\ & -4x_1 - 10x_2 = -6 \\ \hline & 0 - 8x_2 = -13 \end{cases}$$

O valor de x_2 é:

$$\begin{aligned}
 -8x_2 &= -13 \\
 x_2 &= \frac{13}{8}
 \end{aligned}$$

Agora falta obter o valor da incógnita x_1 e para isto pode-se substituir $x_2 = 13/8$ em qualquer uma das equações do sistema dado. Por exemplo, substituindo $x_2 = 13/8$ na segunda equação do sistema, encontra-se:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 5\left(\frac{13}{8}\right) &= 3 \\ 2x_1 + \frac{65}{8} &= 3 \\ 2x_1 &= 3 - \frac{65}{8} \\ 2x_1 &= \frac{24 - 65}{8} \\ x_1 &= -\frac{41}{8} \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema linear dado é formado pelo par $x_1 = -41/16$ e $x_2 = 13/8$.

□

É necessário salientar que a multiplicação ou divisão de qualquer uma das equações do sistema por um número, não altera a resposta. Muitas vezes é conveniente multiplicar ou dividir ambas as equações, como exemplo, pode-se tomar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -7 \\ 2x_1 - 10x_2 = -6 \end{cases} \quad (5.6)$$

Uma das alternativas para eliminar a incógnita x_1 é multiplicar a primeira equação do sistema por 2 e a segunda por -5 , assim tem-se:

$$\begin{cases} (5x_1 + 2x_2 = -7) \times (2) \\ (2x_1 - 10x_2 = -6) \times (-5) \end{cases}$$

Que resulta em:

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 = -14 \\ -10x_1 + 50x_2 = 30 \end{cases}$$

Assim, a soma das duas equações do sistema eliminará a incógnita x_1 , pois $10x_1 + (-10x_1) = 0$. Pode-se também dividir as equações e eliminar a incógnita x_2 , como é mostrado a seguir ao dividir a segunda equação por 5:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -7 \\ (2x_1 - 10x_2 = -6) \div (5) \end{cases} \quad (5.7)$$

E assim o sistema torna-se:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = -7 \\ 0,4x_1 - 2x_2 = -1,2 \end{cases} \quad (5.8)$$

Agora a eliminação de x_2 fica clara, pois a soma de ambas as equações do sistema faz com que a operação $2x_2 + (-2x_2)$ resulte em zero.

O estudante deve perceber qual ou quais devem ser os números a multiplicar ou dividir as equações do sistema, lembrando que tanto faz multiplicar uma e dividir a outra, já que não há alteração do resultado.

Videoaula 5.1 (Métodos de solução de sistemas lineares). Para mais informações sobre como solucionar sistemas lineares acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/bNCr_KqnDkc



5.4 Mais exemplos

Os exemplos mostrados até agora trataram do caso de sistemas de duas equações lineares e foram resolvidos de maneira rigorosa, sem nenhuma aproximação, dando como soluções números fracionários. Os exemplos a seguir utilizam as informações já descritas para ampliar o horizonte do estudante, mostrando como resolver sistemas de três equações e utilizando aproximações.

Exemplo 5.4. Calcule o valor das variáveis V_1 e V_2 do sistema de equações:

$$\begin{cases} 3V_1 + 2V_2 = 3 \\ 4V_1 - V_2 = 2 \end{cases}$$

Solução:

Como o enunciado da questão não mandou resolver por um método específico, então pode-se escolher qualquer um. Utilizando o método da igualdade, por exemplo, pode-se resolver a questão isolando o valor de V_2 em cada uma das duas equações do sistema. Isolando V_2 na primeira equação tem-se:

$$V_2 = \frac{3 - 3V_1}{2}$$

Isolando V_2 na segunda equação, tem-se:

$$V_2 = -2 + 4V_1$$

Igualando os valores de V_2 , encontra-se:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_2 \\ \frac{3 - 3V_1}{2} &= -2 + 4V_1 \\ 3 - 3V_1 &= -4 + 8V_1 \\ -3V_1 - 8V_1 &= -4 - 3 \\ -11V_1 &= -7 \\ V_1 &= \frac{7}{11} \\ V_1 &\approx 0,64 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de V_1 em qualquer uma das equações nas quais V_2 foi isolada encontra-se o valor de V_2 . Substituindo em $V_2 = -2 + 4V_1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} V_2 &= -2 + 4V_1 \\ V_2 &= -2 + 4(0,64) \\ V_2 &= -2 + 2,56 \\ V_2 &\approx 0,56 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par $V_1 = 0,64$ e $V_2 = 0,56$.

□

Exemplo 5.5. Encontre a solução do sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 2A + 2B - 3C = 3 \\ 4A + 3B + 5C = 2 \\ 5A - 2B - C = 4 \end{cases} \quad (5.9)$$

Solução:

Note que este sistema possui três equações lineares e três incógnitas. Uma maneira de se resolver o sistema é utilizando inicialmente o método da substituição e, posteriormente, o da adição. De início isola-se uma incógnita, por exemplo, A , em uma das equações, como, por exemplo, a primeira. Assim encontra-se:

$$A = \frac{3 - 2B + 3C}{2}$$

Depois substitui o valor de A nas duas outras equações do sistema, como feito a seguir. Substituindo A na segunda equação do sistema:

$$\begin{aligned} 4A + 3B + 5C &= 2 \\ 4\left(\frac{3 - 2B + 3C}{2}\right) + 3B + 5C &= 2 \\ \left(\frac{12 - 8B + 12C}{2}\right) + 3B + 5C &= 2 \\ (6 - 4B + 6C) + 3B + 5C &= 2 \\ -4B + 3B + 6C + 5C &= 2 - 6 \\ -B + 11C &= -4 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Substituindo o valor de A na terceira equação do sistema:

$$\begin{aligned} 5A - 2B - C &= 4 \\ 5\left(\frac{3 - 2B + 3C}{2}\right) - 2B - C &= 4 \\ \left(\frac{15 - 10B + 15C}{2}\right) - 2B - C &= 4 \\ (7,5 - 5B + 7,5C) - 2B - C &= 4 \\ -5B - 2B + 7,5C - C &= 4 - 7,5 \\ -7B + 6,5C &= -3,5 \end{aligned} \quad (5.11)$$

As equações (5.10) e (5.11) encontradas depois da substituição podem ser agora resolvidas como um sistema de duas equações e o estudante pode escolher qualquer método (adição, substituição ou igualdade). Organizando as equações (5.10) e (5.11) como um sistema de duas equações, tem-se:

$$\begin{cases} -B + 11C = -4 \\ -7B + 6,5C = -3,5 \end{cases} \quad (5.12)$$

Elimina-se a incógnita B do sistema, como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} (-B + 11C = -4) \times (-7) \\ -7B + 6,5C = -3,5 \end{cases}$$

Realizando a soma das equações:

$$\begin{cases} 7B - 77C = 28 \\ -7B + 6,5C = -3,5 \\ \hline 0 - 70,5C = 24,5 \end{cases}$$

O valor de C é:

$$C = -\frac{24,5}{70,5} \approx -0,35$$

O valor de B pode ser encontrado, substituindo o valor de C em qualquer uma das equações do sistema enumerado como equação (5.12). Se a primeira equação do sistema é utilizado, então tem-se que:

$$\begin{aligned} -B + 11C &= -4 \\ -B + 11(-0,35) &= -4 \\ -B - 3,85 &= -4 \\ -B &= -4 + 3,85 \\ -B &= -0,15 \\ B &\approx 0,15 \end{aligned}$$

O valor de A agora pode ser facilmente encontrado se os valores de B e C são substituídos em qualquer uma das equações do sistema original, enumerado como equação (5.9). Substituindo os valores de B e C na primeira equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 2A + 2B - 3C &= 3 \\ 2A + 2(0,15) - 3(-0,35) &= 3 \\ 2A + 0,3 + 1,05 &= 3 \\ 2A &= 3 - 0,3 - 1,05 \\ 2A &= 1,65 \\ A &= \frac{1,65}{2} \approx 0,83 \end{aligned}$$

A solução do sistema dado é o trio $A \approx 0,83$, $B \approx 0,15$ e $C \approx -0,35$. Sabemos que os valores utilizados na prática são aproximados e é muito comum que mesmo tendo em mente esta informação usemos o símbolo de igualdade ($=$) no lugar do de aproximado ($\approx$) nos cálculos das grandezas elétricas.

□

Videoaula 5.2 (Sobre a Regra de Cramer para solução de sistemas lineares). Caso tenha curiosidade ou interesse em aprender uma técnica matricial para solução de sistemas lineares acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/pfr0R83BTXM>



5.5 Resumo do capítulo

A aplicação do conteúdo apresentado no presente capítulo ficará evidente a partir do próximo, pois ao utilizar métodos de soluções de circuitos elétricos mais complexos é encontrado um sistema de equações lineares, cuja solução pode ser obtida empregando qualquer um dos três métodos apresentados. O resumo é apresentado na sequência:

- Os três métodos apresentados são: o da substituição, o da igualdade e o da adição;
- No método da substituição, uma variável é escolhida para ser isolada e depois substituída em outra equação do sistema. Este método pode ser aplicado com um número qualquer de incógnitas;
- No método da igualdade, duas variáveis são escolhidas para serem isoladas e depois seus valores são igualados. O método da igualdade resolve problemas apenas de duas incógnitas e duas equações. Se houver mais incógnitas e equações deve ser aplicado em conjunto com outro método;
- No método da adição as equações do sistema são multiplicadas ou divididas por valores que permitam que a soma das equações anule uma das incógnitas. Este método é muito útil quando existem apenas duas equações e duas incógnitas e com mais delas o seu uso fica impraticável.

Problemas propostos

Problema 5.1. Calcule os valores das variáveis nos sistemas de duas equações e duas incógnitas dadas a seguir:

$$(a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -2 \\ -4x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3A - B = 4 \\ -4A + 6B = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} I - 3V = 2 \\ -I + 7V = 30 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 6v_1 - 4v_2 = 3 \\ 7v_1 + v_2 = 53 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 9x_1 - 4x_2 = -2 \\ 7x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 45T_1 - 20T_2 = -20 \\ 43T_1 + 3T_2 = 32 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 35V_1 - 3V_2 = 12 \\ V_1 + 5V_2 = 30 \end{cases}$$

Problema 5.2. Calcule os valores das variáveis nos sistemas de três equações e três incógnitas a seguir:

$$(a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3A - B + 3C = 2 \\ 5A + B - 4C = 8 \\ A - B + C = 6 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3I_1 - I_2 + 3I_3 = 4 \\ 5I_1 + I_2 - 4I_3 = 3 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 2 \end{cases}$$

Capítulo 6

Técnicas para solução de circuitos CC

6.1 Introdução

Em circuitos mais complexos do que os investigados nos capítulos precedentes, nem sempre é possível encontrar as grandezas desejadas empregando somente a lei de Ohm e o conceito de resistência equivalente. Casos como, por exemplo, circuitos com mais de uma fonte de tensão ou de corrente e com elementos resistivos que não estão nem em série nem em paralelo exigem o domínio de estratégias de solução mais rebuscadas do que as até agora apresentadas. Nestes casos, a alternativa é utilizar métodos de análise de circuitos que são baseados nas leis de Kirchhoff (de corrente ou de tensão), em estratégias matemáticas e também em teoremas específicos.

6.2 Definições

Antes da apresentação das leis de Kirchhoff e de suas aplicações na solução de problemas de circuitos, é necessário que o estudante domine os conceitos e definições que serão descritos na sequência.

Fonte de corrente É o elemento de circuito que tem como característica estabelecer um valor de corrente independentemente do valor da tensão em seus terminais ou da potência fornecida ou consumida. O seu símbolo de circuito é mostrado na figura 6.1; note nesta figura que o valor da corrente fornecida pela fonte é I e que o seu sentido está indicado pela seta. Se após os cálculos a polaridade da tensão na fonte de corrente é $+$ no terminal que a corrente entra e $-$ no terminal que a corrente sai, então a fonte está consumindo potência e $P > 0$. O oposto é verdadeiro: se a corrente entra pelo terminal $-$ e sai pelo terminal $+$, então a fonte está gerando potência e $P < 0$.

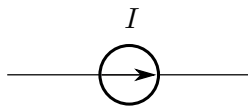


Figura 6.1: Símbolo da fonte de corrente.

Sentido da corrente Considere que uma corrente de 2 A flui no sentido do terminal a para o terminal b como mostrado na figura 6.2. Há duas formas de se indicar esta corrente: uma no sentido do terminal a para o terminal b , denominada I_x , e outra no sentido contrário, denominada I_y . Tem-se que $I_x = 2$ A, já que a indicação do seu sentido coincide com o sentido da corrente, e que $I_y = -2$ A, já que na verdade o deslocamento da corrente se dá no sentido contrário. Tanto faz se o estudante escreve $I_x = 2$ A ou $I_y = -2$ A, desde que o sinal seja posto corretamente em concordância com o sentido real da corrente. Entretanto, é mais comum que as correntes sejam indicadas no sentido em que o seu valor é positivo. Este conceito é importante, pois será exigido

a partir deste capítulo o conhecimento não somente da intensidade (módulo), mas também do sentido da corrente.

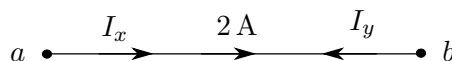


Figura 6.2: Determinação do sinal da corrente.

Polaridade nas fontes de tensão Considera-se a d.d.p. positiva quando a fonte de tensão é percorrida do terminal de maior potencial (+) para o terminal de menor potencial (−). Outra forma de se dizer a mesma coisa é: considera-se a d.d.p. positiva quando a fonte é percorrida na direção da queda de potencial. Obviamente se a fonte é percorrida do terminal de menor potencial (−) para o de maior potencial (+) (ou equivalentemente: em direção ao aumento de potencial), então a d.d.p. é negativa. A figura 6.3 mostra exemplos de como determinar o sinal da d.d.p. de uma fonte de tensão a depender de como ela é percorrida.

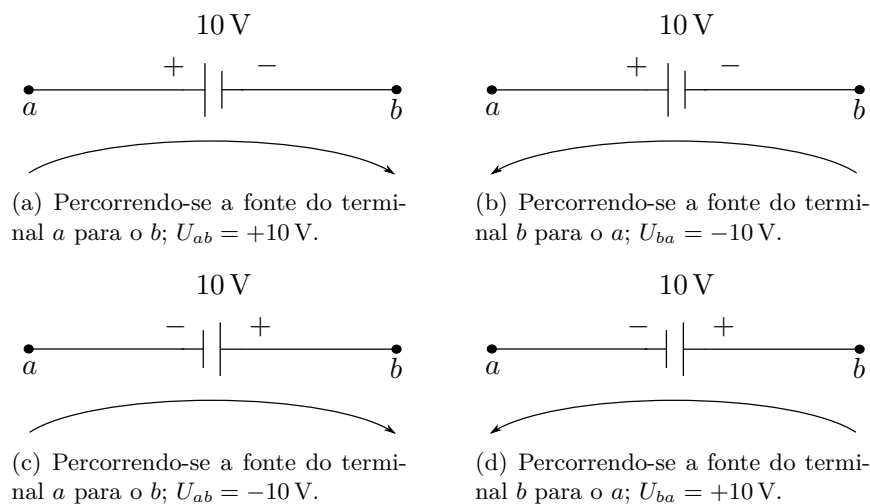


Figura 6.3: Determinação do sinal da d.d.p. nas fontes de tensão a depender de como são percorridas.

É necessário salientar que a fonte de tensão ideal, por definição, mantém a tensão em seus terminais constante independentemente do valor da corrente que a atravessa, porém a potência pode ser gerada ou consumida pela fonte de tensão. Nos casos tratados no capítulo 3, só foi considerada uma única fonte de tensão e resistências no circuito e, nesta situação, a fonte de tensão sempre fornecia a potência que era consumida pelas resistências. No caso de haver mais de uma fonte de tensão é necessário verificar quais delas fornecem e quais delas consomem potência utilizando o seguinte critério: considerando que a corrente é indicada no sentido em que seu valor é positivo, a fonte de tensão fornece potência se a corrente flui do terminal − para o + ($P < 0$) e, caso contrário, se a corrente flui do terminal + para o −, a fonte de tensão consome potência ($P > 0$).

Polaridade da d.d.p. em resistências O terminal da resistência pelo qual a corrente entra é positivo (+) e o terminal da resistência no qual a corrente sai é negativo (−). Assim como nas fontes de tensão, o valor da d.d.p. depende de como a resistência é percorrida. Também será considerado o valor da d.d.p. positivo quando a resistência for percorrida no sentido da queda de tensão, ou seja, do + para o −. A d.d.p. será negativa quando a resistência for percorrida do − para o +. Veja a figura 6.4 para entender melhor o que foi dito.

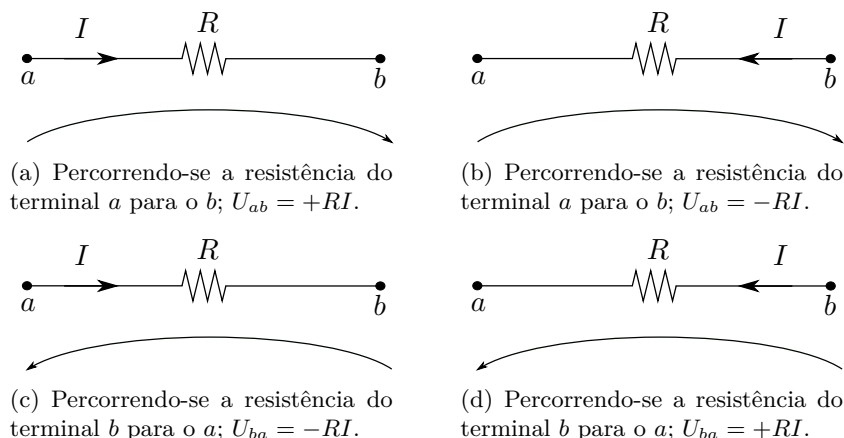


Figura 6.4: Avaliação do sinal da d.d.p. nas resistências a depender da indicação da corrente e de como as resistências são percorridas.

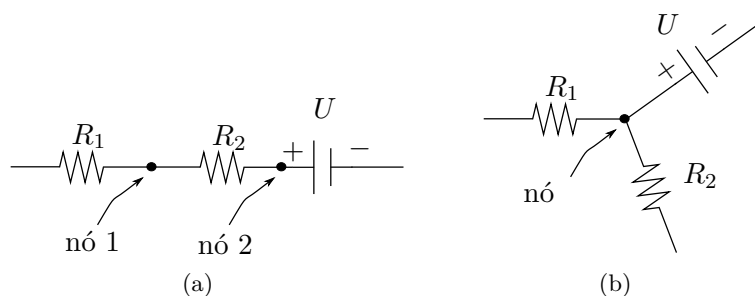


Figura 6.5: Indicação de nós em circuitos.

Nó É o ponto do circuito no qual dois ou mais elementos do circuito são conectados. Na figura 6.5 os nós são identificados com um ponto para maior clareza¹.

Ramo Trecho do circuito entre dois nós consecutivos. Outra forma de definir ramo é: caminho único, contendo um elemento de circuito simples e que conecta um nó a outro nó. No circuito da figura 6.6(a) há 5 ramos que ficam mais visíveis se o circuito é redesenhado, como na figura 6.6(b), que é utilizada como base para as análises a seguir:

- Entre os nós 1 e 2, há três ramos: um com uma fonte de corrente, outro com a resistência R_1 e o último com a resistência R_2 ;
- Entre os nós 1 e 3, há um ramo: o que possui a resistência R_3 ;
- Entre os nós 2 e 3, há um ramo: o que possui a fonte de tensão.

O estudante pode notar que em um circuito no qual todos os elementos tenham seus dois terminais conectados, o número de ramos é igual ao número de elementos. Desta maneira, basta contar os elementos de circuito que se obterá o número de ramos do circuito.

Laço Qualquer caminho fechado que passe apenas uma vez por cada nó. Veja a figura 6.7 na qual são identificados três laços. Note que todos os laços passam apenas uma única vez em cada um dos nós. Apesar da representação do laço ser feita interna ao circuito, o estudante deve imaginar que percorre-se o circuito pelos seus fios e elementos.

¹Noutros livros considera-se nó o ponto do circuito no qual três ou mais elementos são ligados. A diferença das definições só é relevante nos métodos de solução de circuitos mais rigorosos nos quais utiliza-se a quantidade de nós segundo esta última definição.

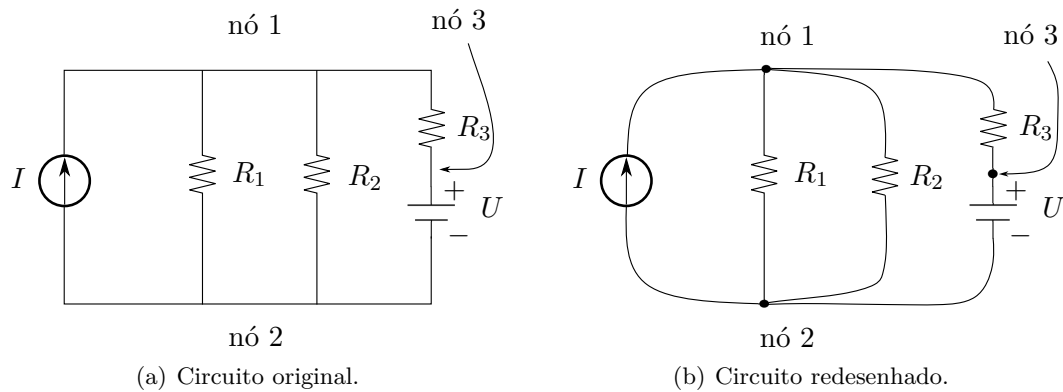


Figura 6.6: Indicação de nós para identificar os ramos de um circuito.

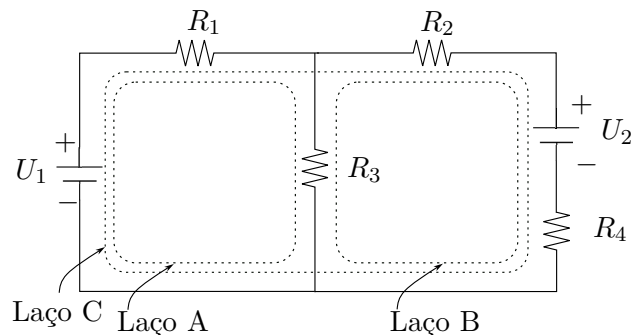
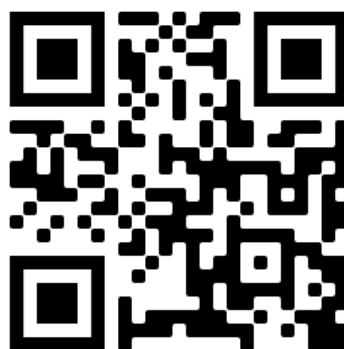


Figura 6.7: Laços de um certo circuito.

Malha É um laço que não contém nenhum outro internamente ou, alternativamente, é qualquer caminho fechado que não possui um outro caminho fechado dentro dele. Na figura 6.7 os laços A e B são malhas, enquanto que o laço C não é, pois dentro dele há os laços A e B .

Videoaula 6.1 (Pré-requisitos para entender as leis de Kirchhoff). Para mais informações sobre conceitos de circuitos necessários para compreender na plenitude as leis de Kirchhoff acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/7tB-14356qA>



6.3 Leis de Kirchhoff

Quando o estudante ler os enunciados das duas *leis de Kirchhoff*, notará que já as utilizou para resolver problemas do capítulo 3, porém neste capítulo as leis serão apresentadas de maneira mais formal, pois serão importantes para o uso adequado em métodos de análises de circuitos e noutras aplicações descritas no decorrer do presente livro. As duas leis de Kirchhoff são enunciadas e exemplos de sua aplicação são dados no decorrer desta seção.

Primeira lei de Kirchhoff ou lei das correntes Diz que a soma das correntes que entram em um nó é igual a soma das correntes que saem deste mesmo nó. Outra forma equivalente de enunciar a lei das correntes é dizendo que a soma de todas as correntes entrando no nó é igual a zero. O exemplo 6.1 mostra aplicações desta lei.

Exemplo 6.1. Calcule o valor da corrente I indicada nos circuitos da figura 6.8.

Solução:

De início será encontrado I no circuito da figura 6.8(a). Usando a lei das correntes, que diz que a soma das correntes que entram em um nó é igual a soma das correntes que saem, tem-se:

$$\underbrace{\text{Correntes que entram}}_{10 + 12} = \underbrace{\text{Correntes que saem}}_{15 + I}$$

Que resulta em:

$$\begin{aligned} I &= 10 + 12 - 15 \\ I &= 7 \text{ A} \end{aligned}$$

Agora será encontrado o valor de I indicada na figura 6.8(b). Mais uma vez é utilizada a lei das correntes, que permite escrever:

$$\underbrace{\text{Correntes que entram}}_{8 + 11 + 1 + I} = \underbrace{\text{Corrente que sai}}_0$$

Que resulta em:

$$\begin{aligned} I &= -8 - 11 - 1 \\ I &= -20 \text{ A} \end{aligned}$$

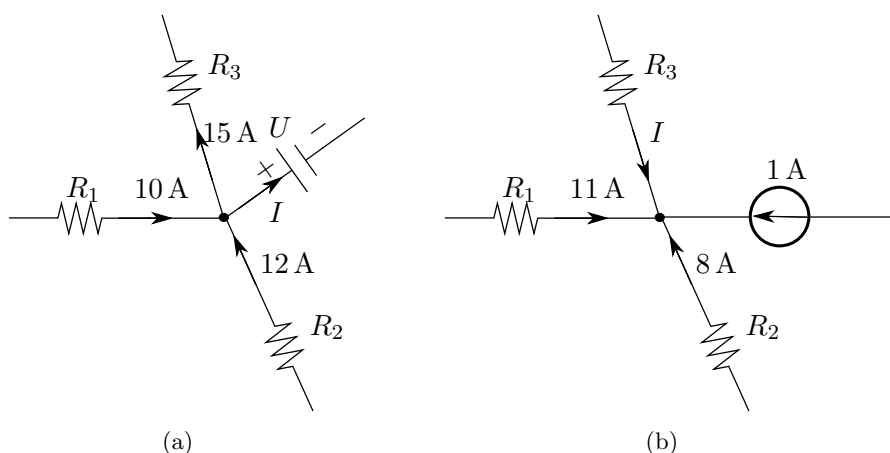


Figura 6.8: Circuitos relativos ao exemplo 6.1.

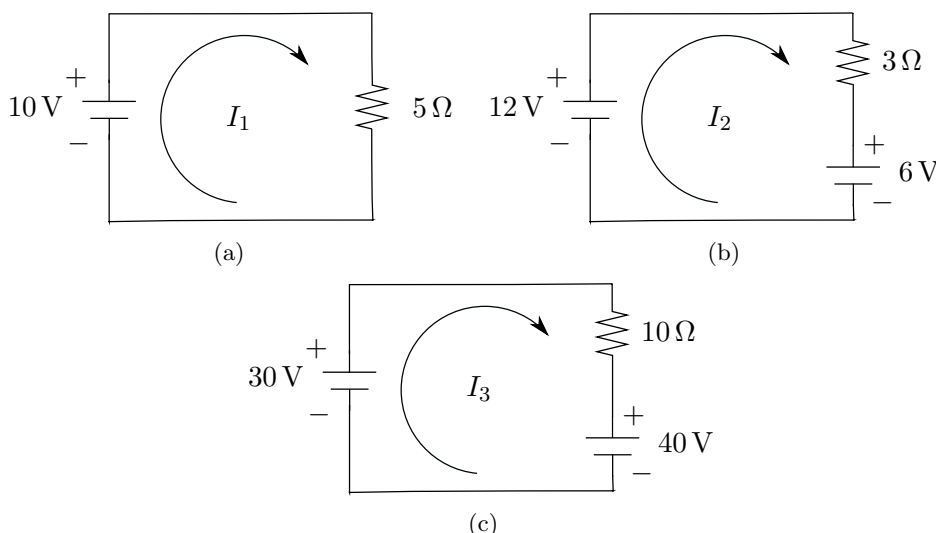


Figura 6.9: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 6.2.

Como todas as correntes estão indicadas entrando no nó, era de se esperar que o valor de I fosse negativo. Se o estudante desejar pode também indicar I saindo do nó e com valor igual a +20 A ou simplesmente 20 A. Ambas as indicações para I (seja entrando ou saindo do nó) estão corretas, desde que se respeite o sinal do valor de I . O habitual é indicar o sentido em que a corrente fique positivo.

□

Segunda lei de Kirchhoff, lei das tensões ou lei das malhas Diz que a soma das d.d.p. de cada ramo que constitui um laço, quando este é completamente percorrido em um sentido, é igual a zero. Lembrando que em cada ramo haverá um elemento, então pode-se enunciar a segunda lei de Kirchhoff da seguinte forma: a soma das d.d.p. nos terminais de todos os elementos que constituem um laço é igual a zero. O exemplo 6.2 mostra aplicações desta lei. Esta lei também é chamada de lei de Kirchhoff das tensões (LKT). Outro comentário relevante é que ela se aplica obviamente às malhas, sendo esta aplicação mais comum, por isto mesmo a lei é também conhecida como lei das malhas.

Exemplo 6.2. Encontre o valor da corrente dos circuitos da figura 6.9.

Solução:

Os circuitos da figura 6.9 possuem apenas um laço (que neste caso também é uma malha). As indicações das correntes já estão feitas (todas no sentido horário) e o seu valor pode ser encontrado utilizando a segunda lei de Kirchhoff, que diz que a soma das tensões de todos os elementos em um laço é igual a zero. A seguir, as soluções para cada circuito.

- I_1 da figura 6.9(a) pode ser encontrada usando a segunda lei de Kirchhoff, como mostrado na sequência:

$$\begin{aligned} -10 + 5I_1 &= 0 \\ I_1 &= \frac{10}{5} = 2 \text{ A} \end{aligned}$$

Saliente-se que a malha foi percorrida a começar pela fonte de tensão, mas se fosse desejo do estudante começar pela resistência o resultado encontrado seria o mesmo ($5I_1 - 10 = 0 \Rightarrow I_1 = 10/5 = 2 \text{ A}$).

- I_2 da figura 6.9(b) é encontrado quando é utilizada novamente a segunda lei de Kirchhoff, como mostrado na sequência:

$$+3I_2 + 6 - 12 = 0$$

$$+3I_2 - 6 = 0$$

$$+3I_2 = 6$$

$$I_2 = \frac{6}{3} = 2 \text{ A}$$

- I_3 da figura 6.9(c) também é encontrado empregando-se novamente a segunda lei de Kirchhoff. Assim tem-se que:

$$+40 - 30 + 10I_3 = 0$$

$$10 + 10I_3 = 0$$

$$I_3 = \frac{-10}{10} = -1 \text{ A}$$

Note que I_3 possui valor negativo, ou seja, a corrente na verdade circula no sentido anti-horário. Como nem sempre é possível saber de antemão o sentido de circulação da corrente, é muito comum encontrar valores negativos. Não há nada de errado, o estudante só deve ficar atento se o problema quer saber a intensidade (módulo) da corrente ou seu valor e sentido. Sendo esta última opção, pode-se dizer que a corrente indicada no sentido horário possui valor de -1 A ou pode dizer também que a corrente neste mesmo laço indicada no sentido anti-horário possui valor de 1 A (é mais comum que seja dito o valor positivo e indicado seu respectivo sentido).

Nota: é sugerido ao estudante solucionar este exemplo indicando as correntes no sentido anti-horário.

□

Videoaula 6.2 (Sobre as 1ª e 2ª leis de Kirchhoff). Para mais informações sobre as 1ª (referente às correntes) e 2ª (referente às tensões) leis de Kirchhoff acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/CMnn7UXm9xw>



6.4 Análise de malhas

O emprego da lei de Kirchhoff das tensões, quando aplicada às malhas, permite encontrar os valores das correntes de circuitos. A seguir o procedimento do chamado *método da análise de malhas* é descrito e para seu uso adequado, o estudante deve:

1. Identificar cada uma das malhas e nomear a corrente que circula em cada uma delas com uma variável (neste livro geralmente as correntes são nomeadas como $I_1, I_2, I_3, \dots$). As correntes podem ser indicadas no sentido horário ou anti-horário. Os sentidos das correntes podem ser escolhidos independentemente, ou seja, uma malha pode ter sua corrente indicada no sentido horário e outra malha pode ter sua corrente indicada no sentido anti-horário. Não há critério para os sentidos das correntes nas malhas, portanto, a escolha depende da vontade ou da percepção de quem estiver solucionando a questão, pois pode notar que a opção por algum sentido cria algum tipo de facilidade;
2. Escrever as equações de tensão para cada uma das malhas utilizando a LKT;
3. Organizar as equações de tensão encontradas no item anterior como um sistema de equações;
4. Resolver o sistema de equações do item anterior para encontrar as correntes das malhas.

Este procedimento descrito é mostrado no exemplo 6.3.

Exemplo 6.3. Calcule os valores das correntes I_x , I_y e I_w indicadas no circuito da figura 6.10(a).

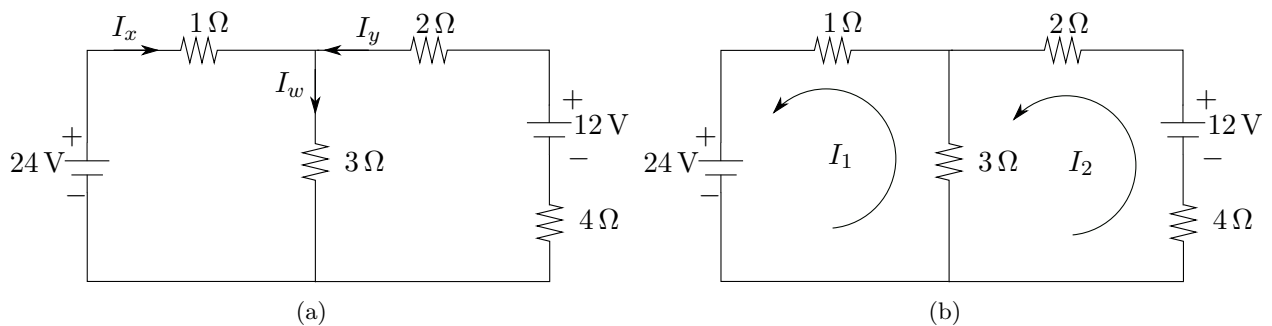


Figura 6.10: Circuitos elétricos correspondentes ao exemplo 6.3

Solução:

Empregando o procedimento descrito no início desta seção pode-se encontrar as correntes solicitadas.

1. Conforme mostrado na figura 6.10(b), as duas malhas são identificadas e as suas correntes foram nomeadas I_1 e I_2 (ambas no sentido anti-horário);
2. A equação de tensão para a malha 1 (percorrida no sentido anti-horário a partir da resistência de 1Ω) é encontrada e organizada a seguir:

$$\begin{aligned}
 +1I_1 + 24 + 3(I_1 - I_2) &= 0 \\
 1I_1 + 24 + 3I_1 - 3I_2 &= 0 \\
 I_1 + 3I_1 - 3I_2 + 24 &= 0 \\
 4I_1 - 3I_2 &= -24
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Note que a corrente que circula (de baixo para cima) no ramo que possui a resistência de 3Ω é $I_1 - I_2$, pois esta resistência faz parte das duas malhas.

A equação de tensão para a malha 2 (percorrida no sentido anti-horário a partir da resistência de 2Ω) é encontrada e organizada a seguir:

$$\begin{aligned}
 +2I_2 + 3(I_2 - I_1) + 4I_2 - 12 &= 0 \\
 2I_2 + 3I_2 - 3I_1 + 4I_2 - 12 &= 0 \\
 -3I_1 + 2I_2 + 3I_2 + 4I_2 - 12 &= 0 \\
 -3I_1 + 9I_2 &= 12
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Note que a corrente que circula (de cima para baixo) no ramo que possui a resistência de 3Ω é $I_2 - I_1$, pois esta resistência faz parte das duas malhas.

3. As equações (6.1) e (6.2) formam um sistema de equações, que pode ser organizado como:

$$\begin{cases} 4I_1 - 3I_2 = -24 \\ -3I_1 + 9I_2 = 12 \end{cases} \quad (6.3)$$

4. Para solucionar o sistema será usado o método da substituição. As equações acima enumeradas como (6.3) serão chamadas de primeira equação ($4I_1 - 3I_2 = -24$) e segunda equação ($-3I_1 + 9I_2 = 12$). Isolando I_1 na primeira equação, encontra-se:

$$\begin{aligned} 4I_1 &= 3I_2 - 24 \\ I_1 &= \frac{3I_2 - 24}{4} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Substituindo I_1 na segunda equação, encontra-se:

$$\begin{aligned} -3I_1 + 9I_2 &= 12 \\ -3\left(\frac{3I_2 - 24}{4}\right) + 9I_2 &= 12 \\ \left(\frac{-9I_2 + 72}{4}\right) + 9I_2 &= 12 \\ \left(\frac{-9I_2 + 72 + 36I_2}{4}\right) &= 12 \\ -9I_2 + 72 + 36I_2 &= 48 \\ -9I_2 + 36I_2 &= 48 - 72 \\ 27I_2 &= -24 \\ I_2 &= -\frac{24}{27} = -\frac{8}{9} = -0,89 \text{ A} \end{aligned}$$

O valor de I_2 já foi encontrado, agora falta o valor de I_1 . Este pode ser obtido substituindo I_2 em qualquer uma das duas equações do sistema linear. Já que a primeira equação já foi manipulada de maneira conveniente, então será utilizada a equação (6.4):

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{3I_2 - 24}{4} \\ I_1 &= \frac{3(-0,89) - 24}{4} \\ I_1 &= \frac{-2,67 - 24}{4} \\ I_1 &= \frac{-26,67}{4} \\ I_1 &= -6,67 \text{ A} \end{aligned}$$

O próximo passo é organizar a resposta. A comparação entre as correntes I_x , I_y e I_w do circuito da figura 6.10(a) e as correntes I_1 e I_2 da figura 6.10(b) permite encontrar:

$$\begin{aligned} I_x &= -I_1 = -(-6,67) = 6,67 \text{ A} \\ I_y &= I_2 = -0,89 \text{ A} \\ I_w &= I_2 - I_1 = -0,89 - (-6,67) = -0,89 + 6,67 = 5,78 \text{ A} \end{aligned}$$

□

Exemplo 6.4. Calcule a potência consumida pelo dispositivo modelado pela resistência de 5Ω do circuito mostrado na figura 6.11 considerando as correntes I_1 e I_2 nos sentidos já indicados.

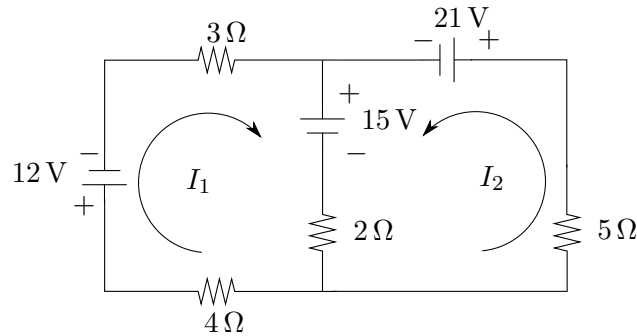


Figura 6.11: Circuito correspondente ao exemplo 6.4.

Solução:

É necessário empregar a análise de malhas para encontrar o valor de corrente que atravessa a resistência de 5Ω e com o seu valor pode-se calcular a potência utilizando:

$$P_{5\Omega} = 5I_{5\Omega}^2$$

1. Os sentidos das correntes já foram determinadas pelo enunciado do problema e são a I_1 no sentido horário e a I_2 no sentido anti-horário;
2. Obtém-se a equação de tensão para a malha 1 a partir da resistência de 3Ω , como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} 3I_1 + 15 + 2(I_1 + I_2) + 4I_1 + 12 &= 0 \\ 3I_1 + 2I_1 + 4I_1 + 2I_2 + 15 + 12 &= 0 \\ 9I_1 + 2I_2 &= -27 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Note que a corrente que circula de cima para baixo na resistência de 2Ω é $I_1 + I_2$, pois esta resistência faz parte de ambas as malhas.

Obtém-se a equação de tensão para a malha 2 a partir da fonte de 21 V, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} 21 + 15 + 2(I_2 + I_1) + 5I_2 &= 0 \\ 2I_1 + 2I_2 + 5I_2 + 21 + 15 &= 0 \\ 2I_1 + 7I_2 &= -36 \end{aligned} \quad (6.6)$$

3. As equações (6.5) e (6.6) formam um sistema de equações, que pode ser organizado como:

$$\begin{cases} 9I_1 + 2I_2 = -27 \\ 2I_1 + 7I_2 = -36 \end{cases} \quad (6.7)$$

Será utilizado o método da adição para solucionar o sistema de equações descrito na equação (6.7). O estudante deve lembrar que deseja-se obter a corrente na resistência de 5Ω , que no caso é I_2 . Desta forma, precisa-se encontrar uma maneira de eliminar a variável I_1 na soma das equações do sistema. Pode-se, por exemplo, multiplicar a segunda equação por $-9/2$ e assim dar prosseguimento à solução do sistema de equações, como mostrado a seguir:

$$\begin{cases} 9I_1 + 2I_2 = -27 \\ (2I_1 + 7I_2 = -36) \times (-9/2) \end{cases} \quad (6.8)$$

Resultando em:

$$\begin{cases} 9I_1 + 2I_2 = -27 \\ -9I_1 - \frac{63}{2}I_2 = 162 \end{cases} \quad (6.9)$$

Agora pode-se finalmente somar as equações do sistema, encontrando-se:

$$\begin{cases} 9I_1 + 2I_2 = -27 \\ -9I_1 - \frac{63}{2}I_2 = 162 \\ \hline 0 - (59/2)I_2 = 135 \end{cases} \quad (6.10)$$

O valor de I_2 é:

$$-59I_2 = 270 \quad (6.11)$$

$$I_2 = -\frac{270}{59} = -4,5763 \approx -4,58 \text{ A} \quad (6.12)$$

Note que não é necessário calcular o valor de I_1 , apesar de ter sido necessário indicar seu sentido e encontrar a equação da malha 1 para que fosse possível obter o sistema de equações.

A potência solicitada no presente exemplo é encontrada utilizando-se a equação (6.4) e lembrando que $I_{5\Omega} = I_2 = -4,58 \text{ A}$. Desta maneira, obtém-se:

$$P_{5\Omega} = 5I_{5\Omega}^2 = 5(-4,58)^2 = 104,71 \text{ W}$$

O estudante deve notar que não faz diferença no resultado se a corrente possui valor positivo ou negativo, já que a potência é sempre consumida por um elemento resistivo. Outra forma de entender isto é notando que um número elevado ao quadrado sempre resulta em um valor positivo, ou seja: $4,58^2 = (-4,58)^2 = 20,98$.

□

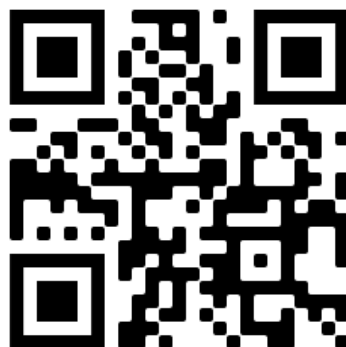
Videoaula 6.3 (Sobre o método análise de malhas). Para mais detalhes sobre a técnica de análise de malhas acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/MbII-LIBZFc>



Videoaula 6.4 (Exemplo utilizando o método análise de malhas). Para ver a solução de um exemplo que utiliza a técnica de análise de malhas para encontrar as grandezas de um circuito acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/n14-GH2U_s8



6.4.1 Associação de fontes de tensão

Uma das aplicações mais diretas da lei das tensões de Kirchhoff e da análise de malhas é na associação de fontes de tensão. Elas são utilizadas em conjunto quando uma única fonte não consegue fornecer o valor requerido de tensão ou potência. Dois casos simples são utilizados para exemplificar os motivos pelos quais se faz a associação de fontes de tensão:

Caso 1 Um dispositivo deve ser alimentado com uma d.d.p. de 60 V, porém, só há baterias de 12 V. Deve-se então associar em série 5 baterias (ver figura 6.12(a)) e isto ainda permite aumentar em 5 vezes a potência que pode ser fornecida;

Caso 2 Suponha que um equipamento deve ser alimentado com uma d.d.p. de 12 V consumindo uma potência de 1 000 W, porém só há baterias de 12 V e que fornecem no máximo 500 W cada. Deve-se então associar duas baterias em paralelo, assim o valor da tensão é mantido em 12 V e a potência total que pode ser fornecida pela associação de baterias é igual a que é consumida pela carga (ver figura 6.12(b)). Pode-se pensar este caso do aumento de potência como um aumento de corrente, pois a tensão é mantida, mas a corrente que as fontes associadas podem fornecer aumenta.

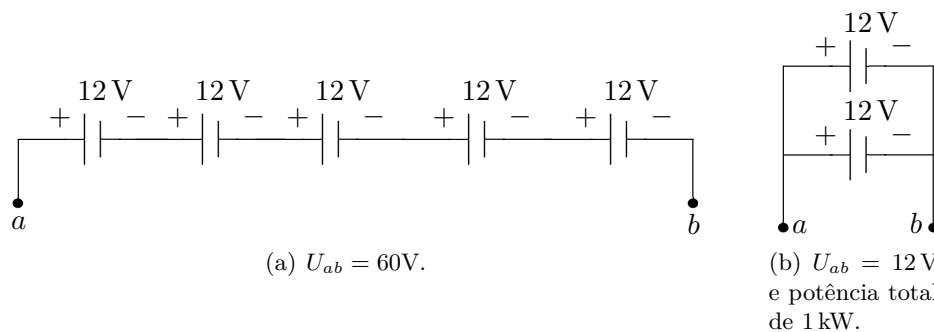


Figura 6.12: Associações em série e em paralelo de fontes de tensão ideais.

Ainda que os dois casos tratados sejam específicos, pode-se perceber que a associação de fontes permite aumento de tensão (quando associadas em série) ou de corrente (quando associadas em paralelo). Da análise destes dois casos pode-se resumir os motivos pelos quais se realiza a associação de fontes de tensão:

Associação em série de fontes de tensão É realizada quando se deseja aumentar o valor da tensão a ser fornecida à carga. A potência que pode ser fornecida também aumenta com a adição de mais baterias na associação;

Associação em paralelo de fontes de tensão É realizada quando se deseja aumentar o valor da corrente que pode ser fornecida a uma carga, mas não se deseja modificar o valor da d.d.p. aplicada à mesma. A potência que pode ser fornecida também aumenta com a adição de mais baterias na associação.

Os exemplos a seguir mostram situações mais complexas nas quais faz-se necessário associar fontes de tensão.

Exemplo 6.5. Sabendo que cada bateria possui uma d.d.p. de 12 V e pode fornecer uma potência máxima 2 kW, calcule para o circuito mostrado na figura 6.13(a):

- O valor da tensão entre os terminais *a* e *b* da associação de baterias e;
- A potência total que a associação delas pode fornecer a uma carga que seja conectada a estes terminais.

Obs.: deve ser notado que as polaridades das baterias estão indicadas com + e -.

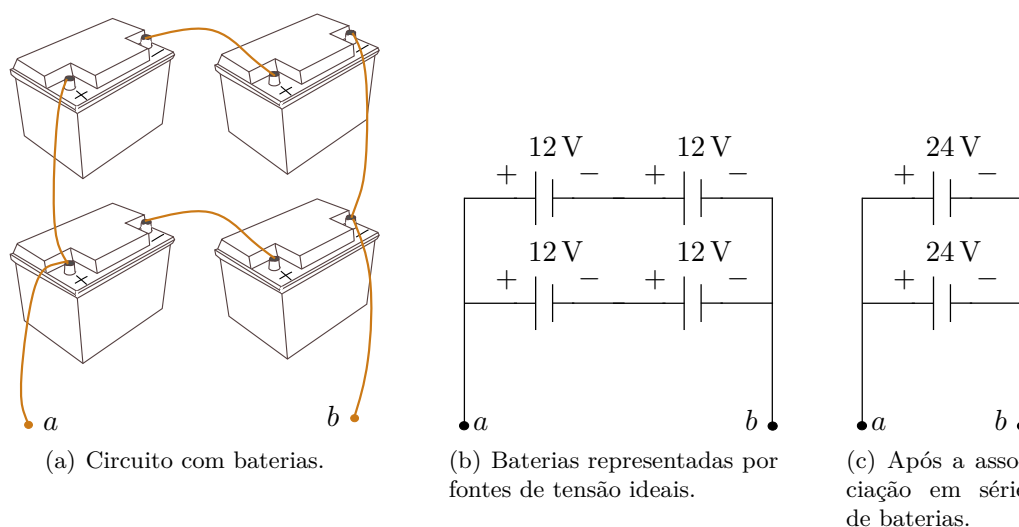


Figura 6.13: Circuitos elétricos referentes ao exemplo 6.5.

Solução:

Com o intuito de tornar a visualização mais fácil para o estudante, o circuito da figura 6.13(a) é redesenhado na figura 6.13(b) e assim fica mais fácil perceber que há baterias em série, que depois de associadas permite que o circuito seja redesenhado como mostrado na figura 6.13(c). As respostas são:

- Do desenho da figura 6.13(c) conclui-se que valor da tensão entre os terminais *a* e *b* da associação de baterias é 24 V;
- A potência total que a associação das baterias pode fornecer é de $4 \times 2\text{ kW} = 8\text{ kW}$ (basta multiplicar a potência de cada bateria pela quantidade total delas).

Conclui-se que uma única bateria de 24 V que pudesse fornecer uma potência de 8 kW poderia substituir todas as quatro baterias. Entretanto, o arranjo com várias baterias é feito exatamente quando não há disponível uma única que possua os valores de d.d.p. e potência adequados. A especificação de baterias foge ao escopo do presente livro, pois ainda é necessário verificar por quanto tempo a bateria consegue fornecer a potência calculada.

□

O estudante pode ainda não ter percebido a forte relação existente entre a associação de fontes de tensão ideais e a lei das tensões de Kirchhoff. Para que esta relação fique clara, o exemplo 6.6 mostra como a tensão nos terminais da associação se comporta a depender da polaridade de cada fonte de tensão ideal.

Exemplo 6.6. Qual o valor da tensão U_{ab} nos terminais dos circuitos mostrados na figura 6.14?

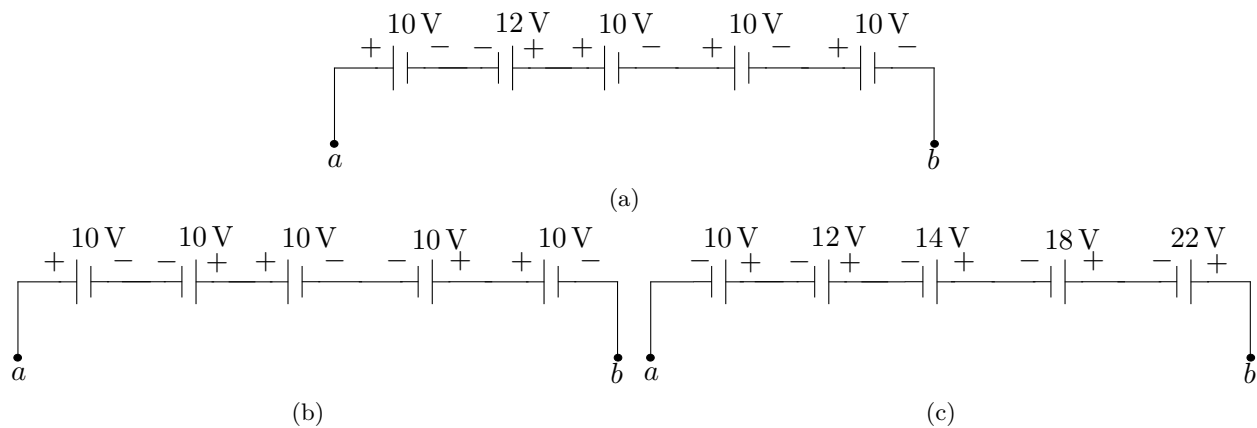


Figura 6.14: Circuitos elétricos referentes ao exemplo 6.6.

Solução:

Para o circuito mostrado na figura 6.14(a) deve-se utilizar a lei das tensões de Kirchhoff percorrendo o circuito no sentido anti-horário. O estudante deve imaginar que entre os terminais a e b há um dispositivo imaginário qualquer e assim percorrendo o laço no sentido anti-horário, encontra-se:

$$U_{ab} - 10 - 10 - 10 + 12 - 10 = 0$$

Portanto:

$$U_{ab} = 28 \text{ V}$$

Se o laço fosse percorrido no sentido horário seria encontrado $U_{ba} = -28 \text{ V}$, porém já deve ser domínio do estudante que isto é igual a $U_{ab} = 28 \text{ V}$, que é a grandeza solicitada.

O valor de U_{ab} para o circuito mostrado na figura 6.14(b) é encontrado quando o mesmo é percorrido no sentido anti-horário e, assim obtém-se:

$$U_{ab} - 10 + 10 - 10 + 10 - 10 = 0$$

$$U_{ab} = 10 \text{ V}$$

Percorrendo o circuito mostrado na figura 6.14(c) no sentido anti-horário, encontra-se:

$$U_{ab} + 22 + 18 + 14 + 12 + 10 = 0$$

$$U_{ab} = -76 \text{ V}$$

Deste exemplo pode-se perceber que é necessário ter bastante cuidado na hora de realizar as conexões das fontes de tensão, pois se elas forem conectadas com polaridades incorretas, a d.d.p. nos

terminais da associação pode não ser aumentada como previsto (neste caso nem todas as tensões nos terminais das fontes se somarão, como mostrado pelos circuitos das figuras 6.14(a) e 6.14(b)).

Ainda que todas as fontes de tensão sejam conectadas com polaridades que somem os valores das suas tensões terminais, deve-se ter atenção à polaridade da associação obtida, como mostrado na figura 6.14(c), na qual o valor da d.d.p. U_{ab} tem valor negativo. Se o dispositivo a ser ligado a estes terminais exige o conhecimento da polaridade, isto deve ser levado em consideração: por exemplo, um motor CC de ímãs permanentes tem o sentido da rotação diretamente relacionado com a polaridade da fonte, então tente imaginar a tragédia que ocorreria num motor cuja função fosse elevar uma carga perigosa e em vez disso ele usasse sua potência para abaixar? A carga não precisa nem mesmo ser explosiva para se imaginar uma tragédia; basta pensar que é uma carga viva: pessoas, por exemplo.

□

Videoaula 6.5 (Associação de fontes de tensão). Para mais informações sobre como realizar a associação de fontes de tensão acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/Q-Vv9pQLG1M>



Placas fotovoltaicas

As placas de energia solar, que também são conhecidas como placas fotovoltaicas ou painéis fotovoltaicos, podem ser tratadas, sob certas situações, como fontes de tensão ideais. Obviamente, deve-se considerar que a placa fotovoltaica opera com valores constantes de radiação, temperatura e potência consumida pela carga, como descrito a seguir:

Radiação Forma na qual a energia gerada pelo Sol é transferida: sua unidade é o W/m^2 e pode ser alterada rapidamente pela passagem de uma nuvem, no caso de uma aplicação terrestre. Ainda que em uma região com poucas nuvens, a radiação solar se altera durante o dia, sendo mais intensa ao meio-dia e menos intensa no início da manhã e fim da tarde. A potência que uma placa fotovoltaica pode fornecer é maior se sobre ela incide um valor elevado de radiação solar. O valor da tensão nos terminais da placa solar também aumenta com o aumento da radiação.

Temperatura Influencia diretamente na operação da placa solar, de forma que quanto menor for a temperatura maior é a capacidade da placa em fornecer potência. Um ambiente ideal para instalação de placas fotovoltaicas deve ter, portanto, elevada radiação solar e baixa temperatura.

Potência consumida pela carga Se incide sobre uma placa fotovoltaica, que não alimenta nenhuma carga, certo valor de radiação solar, pode-se medir a d.d.p. nos seus terminais com um voltímetro. Ainda que a radiação solar mantenha a mesma intensidade, se uma carga é

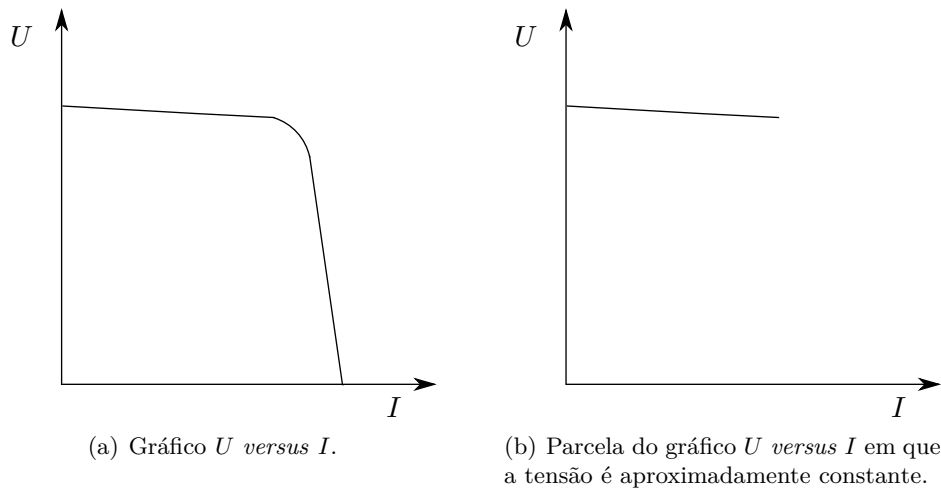


Figura 6.15: Gráficos U versus I característicos de placas fotovoltaicas.

conectada aos terminais da placa fotovoltaica, a leitura do voltímetro será um valor de d.d.p. menor que o do caso anterior, sem carga. Quanto maior for a potência consumida pela carga, menor será a tensão nos terminais da placa fotovoltaica, de maneira que o valor da tensão nos terminais da placa só pode ser considerado constante quando há uma carga que consuma um valor de potência especificado. Se este valor for excedido, a tensão pode diminuir a valores que prejudiquem a operação de todo o sistema e, por isto, instala-se dispositivos de controle e proteção de sistemas de geração fotovoltaica.

Nas fontes de tensão ideais, a tensão nos seus terminais possui sempre o mesmo valor ainda que a corrente fornecida pela fonte à carga aumente indefinidamente e, neste caso, a potência entregue à carga aumenta indefinidamente também, já que ela é calculada pela multiplicação da tensão nos terminais da fonte (constante numa fonte ideal) e da corrente (aumenta indefinidamente). Isto não ocorre na realidade e as fontes de tensão como pilhas, baterias e as citadas placas fotovoltaicas tem a tensão nos seus terminais diminuída quando a carga drena mais corrente. A forma real de uma curva da tensão nos terminais de uma placa fotovoltaica *versus* corrente que é entregue à carga é mostrada na figura 6.15(a), evidencia que a tensão diminui até chegar a zero. Pode-se, portanto, notar que a placa fotovoltaica não pode alimentar qualquer carga, pois se a carga consumir muita potência, o que equivale a dizer que drena muita corrente, então a tensão cairá em níveis não aceitáveis. Obviamente, se a placa fotovoltaica ou a associação delas tiver dimensionamento adequado, então todo o conjunto operará na faixa adequada de tensão (mostrada na figura 6.15(b)) que é a parcela do gráfico da figura 6.15(a) na qual a tensão é aproximadamente constante e, nesse caso, a aproximação da fonte de tensão ideal pode ser empregada em cálculos aproximados como os feitos neste livro.

Se as condições permitem a modelagem de uma placa fotovoltaica por uma fonte de tensão ideal, então o estudante já possui o conhecimento de toda teoria necessária para resolver problemas simples como o descrito no exemplo 6.7.

Saliente-se que para o estudo mais detalhado das relações entre as grandezas tensão, corrente e potência, é necessário o conhecimento de eletrônica, pois a célula fotovoltaica é construída empregando materiais semicondutores; esta abordagem foge ao escopo deste livro e do conhecimento e interesse dos autores.

Exemplo 6.7. Três painéis fotovoltaicos idênticos são ligados em série conforme mostrado na figura 6.16(a). Quais os valores da tensão nos terminais da associação e da potência total que a associação pode fornecer?

Dados: na situação descrita, cada painel possui tensão terminal de 18 V e pode fornecer uma potência de 600 W.

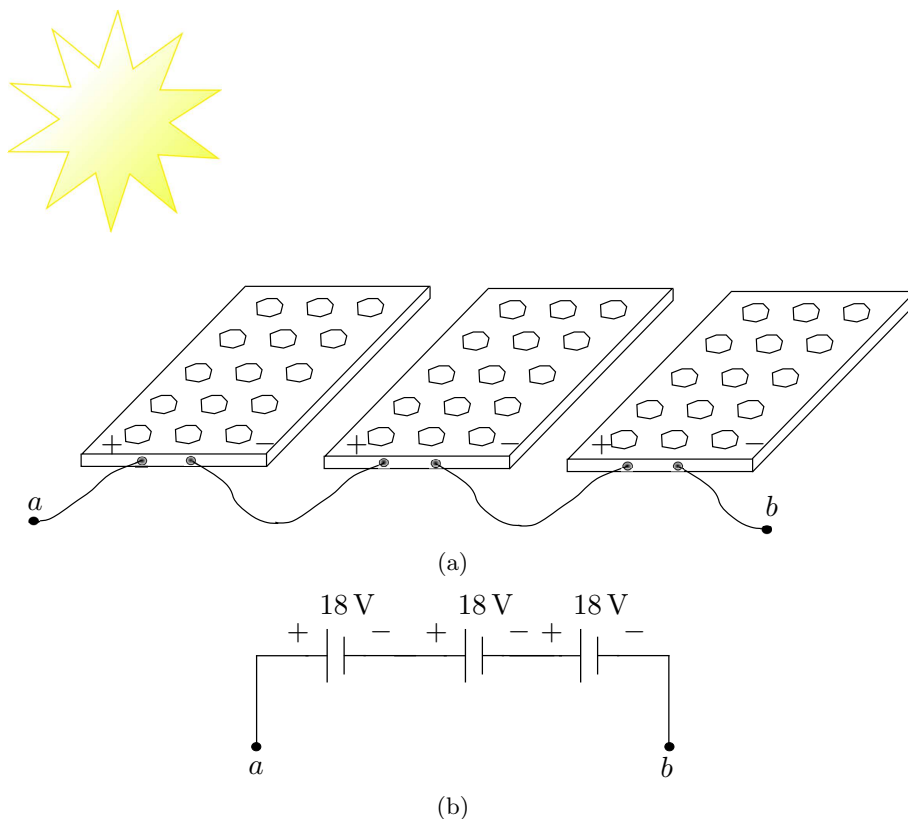


Figura 6.16: Ilustrações referentes ao exemplo 6.7.

Solução:

Para facilitar o entendimento pode-se redesenhar o sistema de alimentação de eletricidade usando placas fotovoltaicas como fontes de tensão ideais (ver figura 6.16(b)). A tensão nos terminais da associação é encontrada somando a tensão de todas as placas. Portanto, a tensão nos terminais da associação é:

$$U_{ab} = 18 + 18 + 18$$

$$U_{ab} = 54 \text{ V}$$

A potência que o conjunto de placas pode fornecer é dado pela soma das potências individuais, que resulta em:

$$P_{total} = 600 + 600 + 600$$

$$P_{total} = 1800 \text{ W}$$

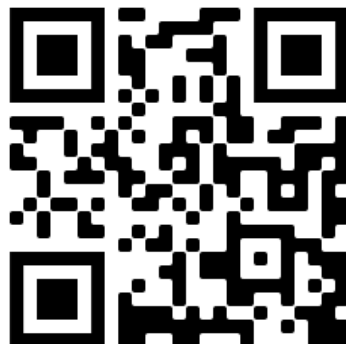
$$P_{total} = 1,8 \text{ kW}$$

O estudante pode notar, observando a ilustração de cada uma das placas solares, que elas possuem vários pequenos hexágonos: estes representam as células fotovoltaicas. As células são associadas internamente em série e em paralelo para que cada uma das placas possua o valor de tensão nos terminais e potência desejada. Assim, o fabricante pode desenvolver vários modelos diferentes de placas fotovoltaicas (com tensões e potências diferentes) alterando somente a forma de associação das células fotovoltaicas e a quantidade delas.

□

Videoaula 6.6 (Sobre o básico de placas fotovoltaicas). Para mais informações sobre as placas fotovoltaicas, que são fontes de tensão contínuas, acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/ublBraBP134>



6.4.2 Análise de malhas com fontes de corrente

A fonte de corrente pode parecer inicialmente um dificultador, pois é mais um tipo de elemento de circuito para ter suas relações postas na mente do estudante. Porém, a existência de uma fonte de corrente na verdade cria uma facilidade, pelo menos quando ela não está entre duas malhas: neste caso faz-se o uso do conceito de supermalha, que é apresentado posteriormente na seção 6.4.3.

Vamos começar nosso estudo respondendo uma pergunta básica: qual é o propósito do método de análise de malhas? É encontrar as correntes nas malhas através das equações de tensão baseadas na 2ª lei de Kirchhoff. A fonte de corrente impõe a corrente de malha, então a corrente é facilmente identificada! Vê-se que a solução ficou na verdade mais simples e não mais complicada. Ainda assim é importante que um exemplo seja apresentado para que se tenha maior clareza na aplicação do método.

Exemplo 6.8. Calcule a corrente I_x indicada no circuito mostrado na figura 6.17. Resolva o problema considerando os sentidos das correntes de malha I_1 e I_2 já indicados no referido circuito.

Solução:

O primeiro passo é escrever as equações das tensões de malhas. Para a malha 1 tem-se que:

$$+2I_1 - 36 + 48 = 0$$

$$2I_1 = -12 \Rightarrow I_1 = -12/2$$

$$I_1 = -6 \text{ A}$$

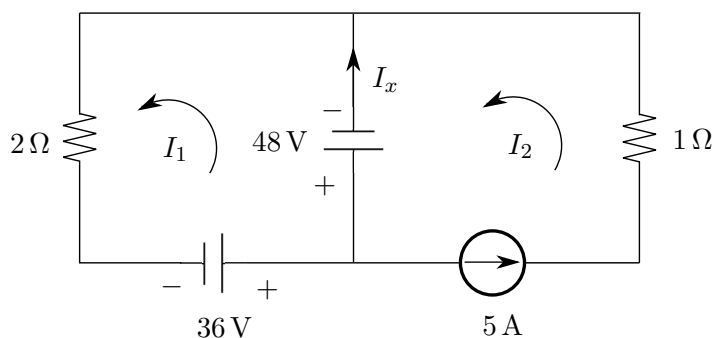


Figura 6.17: Ilustração referente ao exemplo 6.8.

Para a malha 2:

$$I_2 = 5 \text{ A}$$

Veja que a presença da fonte de corrente facilitou a solução. O valor de I_x pode ser encontrado após análise do circuito da figura 6.17:

$$\begin{aligned} I_x &= I_1 - I_2 \\ I_x &= -6 - (5) \\ I_x &= -11 \text{ A} \end{aligned}$$

Na videoaula 6.7 é apresentada a teoria da análise de malhas com fonte de corrente e um exemplo de três malhas, o que pode auxiliar na fixação do método na mente do estudante.

□

Videoaula 6.7 (Análise de malhas em circuitos com fontes de corrente). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de malhas em circuitos com fontes de corrente acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/nCKgx5Rro>



6.4.3 Supermalha

Quando há uma fonte de corrente entre duas malhas surge um problema: como escrever as equações destas malhas que compartilham a fonte de corrente se não é possível identificar uma relação direta entre tensão nos terminais e a corrente imposta pela referida fonte? É necessário que o estudante lembre que a tensão nos terminais da fonte de corrente ideal pode assumir qualquer valor (grande ou pequeno, positivo ou negativo etc.) que ainda assim a corrente não se alterará.

A solução para isto é utilizar a *supermalha*, que surge quando a fonte de corrente que é compartilhada por duas malhas e todos os elementos que estão em série com ela são retirados da ilustração do circuito. Dessa forma, duas malhas se tornam uma: a supermalha. Obviamente será necessário encontrar outra equação para resolver o problema e para isto será utilizada a primeira lei de Kirchhoff e a soma das correntes de qualquer dos dois nós dos elementos retirados será utilizado para este fim.

Siga o procedimento a seguir (vai ficar mais fácil entender acompanhado posteriormente o exemplo 6.9):

1. Identificar as correntes de malha do circuito e seus sentidos (escolhe-se o sentido que quiser, podendo inclusive selecionar sentidos diferentes entre as malhas);
2. Retirar a fonte de corrente entre duas malhas e seus elementos em série da ilustração do circuito;

3. Aplicar a lei de Kirchhoff das tensões na supermalha e demais malhas do circuito;
4. Aplicar a lei de Kirchhoff das correntes num dos nós que se relacione com os elementos retirados na ilustração no primeiro passo. É necessário rever o circuito original sem a retirada do trecho que criou a supermalha;
5. Resolver as equações e encontrar as correntes do circuito.

Exemplo 6.9. Calcule a corrente I_x indicada no circuito mostrado na figura 6.18(a). Resolva o problema considerando os sentidos das correntes de malha I_1 e I_2 já indicados no referido circuito.

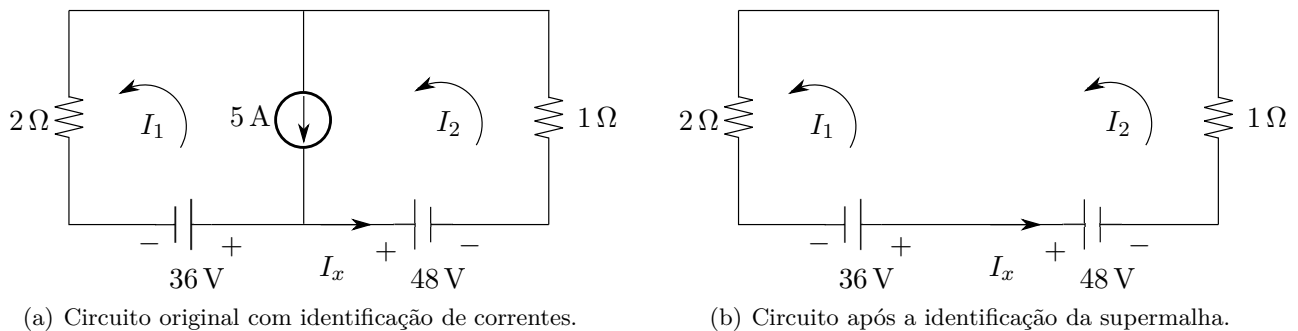


Figura 6.18: Ilustração referente ao exemplo 6.9.

Solução:

Seguindo as cinco etapas descritas anteriormente:

1. No próprio circuito original (ver figura 6.18(a)) já foram estabelecidos os sentidos das correntes das malhas um e dois;
2. Com a retirada da fonte de corrente comum às duas malhas o circuito se torna o ilustrado na figura 6.18(b);
3. O circuito simplificado tem só a supermalha, então a equação de tensão é:

$$\begin{aligned} 2I_1 - 36 + 48 + 1I_2 &= 0 \\ 2I_1 + I_2 &= -12 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Não há outra malha no circuito, mas caso houvesse as equações de tensão deveriam ser escritas;

4. São duas malhas, mas com o uso do conceito de supermalha apenas uma equação foi encontrada. Então deve-se encontrar a segunda equação utilizando lei de Kirchhoff das correntes de um dos nós que possui o trecho retirado do circuito. Será escolhido o nó acima da fonte de 5 A (veja novamente o circuito original da figura 6.18(a)); estudante, depois escolha o nó abaixo e veja que a resposta será a mesma. A equação encontrada é:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 + 5 \\ I_1 - I_2 &= -5 \end{aligned} \quad (6.14)$$

5. O último passo é resolver o sistema formado pelas equações 6.13 e 6.14. Como foi pedida a corrente I_x (releia o enunciado), então bastaria encontrar o valor de I_2 , pois $I_x = I_2$. O par de respostas do sistema é: $I_1 = -5,667$ A e $I_2 = -0,667$ A (faça os cálculos por sua conta). A resposta solicitada é:

$$I_x = I_2 = -0,667 \text{ A}$$

□

Duas coisas seriam bem úteis para fixação do conceito de supermalha: reler o texto desta seção após ter estudado o exemplo e ver a videoaula 6.8. É recomendado que faça ambas as coisas.

Videoaula 6.8 (Sobre o uso da supermalha). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de malhas quando é necessário utilizar o conceito de supermalha acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/c_6irgP3SHM



6.4.4 Análise de malhas por inspeção

Por necessitar de álgebra matricial, este método é tratado como sugestão para cursos menos aprofundados. Obviamente isto não é um problema para cursos superiores e a escolha em fazer uso deste método ou não depende da ementa da disciplina. Nos cursos de circuitos para a formação de pessoal da área de sistemas elétricos de potência (SEP) é conveniente que este método seja apresentado, pois procedimento similar é apresentado para formação da matriz impedância do SEP². A *análise de malha por inspeção* se aplica exclusivamente aos circuitos que tenham fontes de tensão³, não podendo ter, portanto, fontes de corrente para que o método possa ser aplicado. Deve-se escrever um sistema matricial com a seguinte forma:

$$\mathbf{RI} = \mathbf{U} \quad (6.15)$$

As indicações em negrito servem para indicar que se trata de matrizes ou vetores. Na equação (13.10) tem-se:

- **R** representando a matriz de resistência;
- **I** representando o vetor de correntes de malha;
- **U** representando o vetor de tensões.

²Na seção 13.4.3 é tratado da análise de malhas por inspeção em circuitos CA e esta aplicação se assemelha ainda mais à formação da matriz impedância dos SEP.

³Este método exige fontes de tensão independentes ou não controladas. Se houver fontes de tensão dependentes ou controladas a análise de malhas por inspeção explicada não se aplica.

Tendo eles os seguintes formatos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Sendo os elementos da diagonal principal a soma das resistências de cada uma das malhas (por exemplo, R_{33} é o somatório dos valores de todas as resistências da malha 3) e os elementos fora da diagonal são os negativos de cada um dos elementos que estão presente entre as malhas (por exemplo, R_{13} é a resistência comum às malhas 1 e 3);

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

é o vetor com as correntes de malha que se deseja encontrar;

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

é o vetor cujos valores correspondem ao negativo da soma da tensão das fontes de tensão (percorridas conforme já explicado na seção 6.2) de cada uma das malhas. Outra forma de explicar é dizer que, para este método, deve ser levado em consideração que a queda de tensão na fonte resulta numa tensão negativa e vice-versa.

A solução para este problema é facilmente encontrado realizando a operação matricial a seguir:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U} \quad (6.19)$$

Muita atenção: para que este método possa ser aplicado todas as correntes devem ser indicadas em um único sentido (horário ou anti-horário). No exemplo a seguir e na videoaula 6.9 sugerida o sentido horário foi escolhido, mas poderia ser o anti-horário.

Exemplo 6.10. Resolva o exemplo 6.4 utilizando como método de solução de circuitos a análise de malhas por inspeção, porém considerando ambas as correntes de malha no sentido horário.

Solução:

É fortemente recomendado que o estudante redesenhe o circuito e indique as correntes no sentido horário para ter melhor entendimento e conseguir fixar o método. Para esta solução é chamada de malha um aquela à esquerda e de malha dois aquela à direita.

Primeiramente será encontrada a matriz de resistência, que seguindo as orientações já descritas na presente seção é:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (3 + 2 + 4) & -(2) \\ -(2) & (5 + 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Encontra-se agora o vetor $\mathbf{U}$ somando as tensões das fontes: na presente solução é adotado como critério o valor positivo da tensão quando a fonte é percorrida no sentido da queda de tensão (do + para -), então é necessário fazer o negativo desta soma. Seguindo na busca pelo vetor tensão (lembre-se que ambos os sentidos de correntes são horários!):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -(+12 + 15) \\ -(-21 - 15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ 36 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Encontrar as correntes I_1 e I_2 ficou fácil, desde que se saiba a álgebra matricial ou operar corretamente algum *software* que faça os cálculos a seguir:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -27 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,983 \\ 4,5763 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

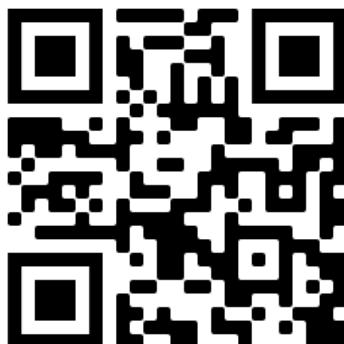
No enunciado do exemplo 6.4 foi encontrado para a corrente I_2 o valor de $-4,5763$, pois no referido exemplo esta corrente estava indicada no sentido anti-horário, portanto, as soluções do referido exemplo e o atual estão coerentes. O enunciado solicitou o cálculo da potência na resistência de $5\,\Omega$ e isto pode ser feito de forma simples para o presente exemplo: $P_{5\Omega} = I_2^2 \times 5$, o que resulta em $104,71\,\text{W}$, se o valor de I_2 for aproximado para $4,58$ como feito no exemplo 6.4.

Na videoaula 6.9, além da teoria, é apresentado um exemplo com um circuito maior com três malhas e uma quantidade maior de fontes de tensão: vale a pena dar uma conferida no caso de ter restado alguma dúvida.

□

Videoaula 6.9 (Análise de malhas por inspeção). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de malhas por inspeção, com exemplo, acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/hLGTBd01oWk>



6.5 Análise de nós

A *análise de nós* ou *análise nodal* utiliza a primeira lei de Kirchhoff (das correntes) para que equações de correntes de nós sejam encontradas e com isto as tensões de nós sejam calculadas. Isto mesmo: na análise de malhas, equações de tensão permitem encontrar correntes enquanto que na análise nodal equações de correntes permitem encontrar tensões.

Para que o método fique sistematizado é apresentado uma sequência de etapas que viabilizam ao estudante fazer o uso correto com menor chance de erro. Saliente-se que há um caso especial na qual uma fonte de tensão entre nós que não sejam o de referência exige que seja usado o conceito de supernó, mas isto é descrito na seção 6.5.1.

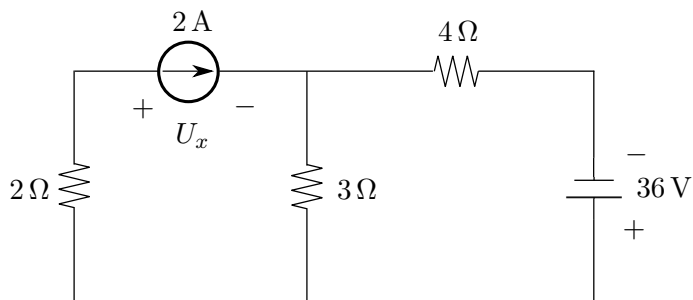
Seguem etapas para aplicação da análise nodal:

1. Deve-se selecionar um dos N nós do circuito para ser o de referência e atribuir tensões $U_1, U_2, \dots, U_{N-1}$ aos $N - 1$ nós restantes;

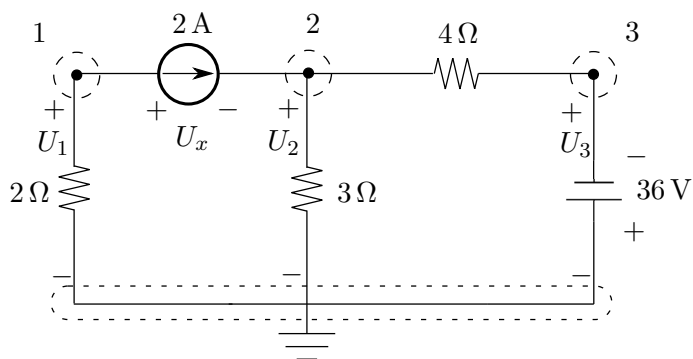
2. Aplicar a lei de Kirchhoff das correntes para cada um dos $N - 1$ nós que não sejam o de referência. Quando houver uma fonte de tensão entre um nó e o nó de referência, então a tensão daquele nó é a tensão da fonte;
3. Organizar e resolver o sistema de equações lineares que surgiu das $N - 1$ equações obtidas.

Estas etapas ficarão mais claras na mente de quem estudar o exemplo 6.11.

Exemplo 6.11. Calcule, utilizando a técnica de análise nodal, a tensão U_x indicada no circuito mostrado na figura 6.19(a).



(a) Circuito original.



(b) Circuito após a identificação dos nós e tensões de nós.

Figura 6.19: Ilustração referente ao exemplo 6.11.

Solução:

Seguindo as etapas descritas anteriormente para sistematização da análise nodal:

1. A indicação do nó de referência é feita na figura 6.19(b) pelo símbolo comumente utilizado para indicar aterramento, porém, neste caso, ele indica apenas que este nó é o de referência. Na mesma figura citada encontram-se também as indicações dos demais nós (1, 2 e 3) e as tensões destes nós em relação ao de referência (U_1 , U_2 e U_3);
2. Utiliza-se nesta etapa a lei de Kirchhoff das correntes em cada um dos nós. Neste caso à esquerda de cada uma das igualdades estarão as correntes que entram no nó e à direita da igualdade as correntes que saem. Para o nó um:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{U_1}{2} + 2 \\
 U_1 &= -4 \text{ V}
 \end{aligned}
 \tag{6.23}$$

Para o nó dois:

$$\begin{aligned}
 2 &= \frac{U_2}{3} + \frac{(U_2 - U_3)}{4} \\
 24 &= 4U_2 + 3(U_2 - U_3) \\
 \frac{24}{12} &= \frac{4U_2 + 3U_2 - 3U_3}{12} \\
 24 &= 4U_2 + 3U_2 - 3U_3 \\
 7U_2 - 3U_3 &= 24
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Para o nó três o cenário é bem simples, pois entre ele e o nós de referência há uma fonte de tensão, portanto:

$$U_3 = -36 \text{ V} \tag{6.25}$$

3. Três nós e três equações foram obtidas, mas neste caso duas tensões (U_1 e U_3) foram obtidas já na etapa de desenvolvimento das equações de nós. Resta apenas o cálculo da tensão referente ao nó dois e isto pode ser feito organizando melhor a equação (6.24) (isolando U_2) e substituindo o valor encontrado na equação (6.25). Tudo isto é feito na sequência:

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \frac{24 + 3U_3}{7} \\
 U_2 &= \frac{24 + 3(-36)}{7} \\
 U_2 &= \frac{-84}{7} = -12 \text{ V}
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

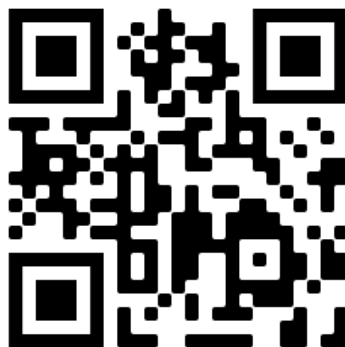
O enunciado não solicita que se encontre as tensões de nós e sim a d.d.p. nos terminais da fonte de corrente (releia o enunciado). Este valor é encontrado a seguir:

$$\begin{aligned}
 U_x &= U_1 - U_2 \\
 U_x &= (-4) - (-12) \\
 U_x &= 8 \text{ V}
 \end{aligned}$$

□

Videoaula 6.10 (Sobre a análise de nós). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de nós, teoria e exemplo resolvido, acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/Jtsdk0fy5Gw>



6.5.1 Supernó

Quando há uma fonte de tensão entre dois nós que não sejam o de referência surge um problema: como escrever as equações de correntes destes nós conectados a esta fonte de tensão se não é possível identificar uma relação direta entre a corrente e a tensão imposta pela referida fonte? É necessário que o estudante lembre que a corrente que flui pela fonte de tensão ideal pode assumir qualquer valor (grande ou pequeno, positivo ou negativo etc.) que ainda assim a tensão não se alterará.

A solução para isto é utilizar o *supernó*, que surge quando a fonte de tensão entre dois nós que não sejam o de referência e todos os elementos que estão em paralelo com ela são integrados a fim de que os dois nós em questão formem um supernó. Dessa forma, dois nós se tornam um: o supernó. Obviamente será necessário encontrar outra equação para resolver o problema e para isto será utilizada a segunda lei de Kirchhoff e a soma das tensões de qualquer malha que envolva o supernó.

Siga o procedimento a seguir (vai ficar mais fácil entender acompanhando posteriormente o exemplo 6.12):

1. Identificar os nós do circuito e suas tensões em relação ao nó de referência;
2. Identificar a fonte de tensão e seus elementos em paralelo entre dois nós. Pode-se suprimir da ilustração do circuito os dois nós em análise e ilustrar um supernó;
3. Aplicar a lei de Kirchhoff das correntes no supernó e demais nós do circuito;
4. Aplicar a lei de Kirchhoff das tensões numa malha que envolva o supernó usando o circuito original;
5. Resolver as equações e encontrar as tensões do circuito.

Exemplo 6.12. Calcule a potência do dispositivo modelado pela resistência de 5Ω no circuito mostrado na figura 6.20(a). Resolva o problema considerando as indicações já feitas de nós e tensões.

Solução:

Saliente-se que sempre que for aplicada a lei de Kirchhoff das correntes nesta solução serão postas à esquerda da igualdade as correntes que entram no nó e à direita as correntes que saem do referido nó. Seguindo as cinco etapas descritas anteriormente:

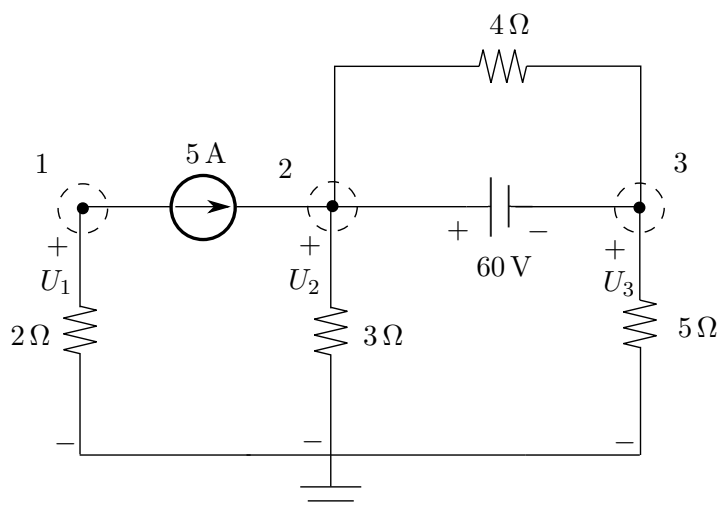
1. No próprio circuito original (ver figura 6.20(a)) já foram estabelecidos os nós 1, 2, 3 e de referência.
2. Com a retirada da fonte de tensão e da resistência de 4Ω que está em paralelo com ela, fica estabelecido o supernó (SN) conforme ilustrado na figura 6.20(b).
3. O circuito simplificado tem os nós 1 e SN , então as equações de corrente são:

Para o nó 1:

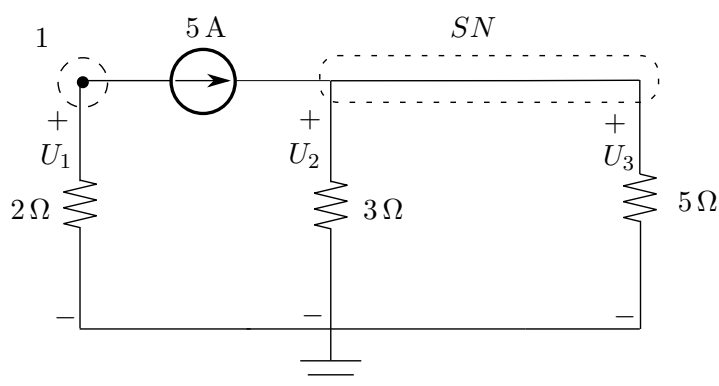
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{U_1}{2} + 5 \\ U_1 &= -10\text{ V} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Para o SN :

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{U_2}{3} + \frac{U_3}{5} \\ 75 &= 5U_2 + 3U_3 \\ \hline 15 \\ 5U_2 + 3U_3 &= 75 \end{aligned} \quad (6.28)$$



(a) Circuito original com identificação de nós.



(b) Circuito após a identificação do supernó.

Figura 6.20: Ilustração referente ao exemplo 6.12.

4. São três os nós no circuito original (excluindo o de referência), então é necessário encontrar uma terceira equação para solucionar o sistema, pois este deve ter três variáveis, pois há três tensões de nó. A terceira equação virá da aplicação da lei de Kirchhoff das tensões em qualquer malha que envolva o supernó, porém isto deve ser feito no circuito original (ver figura 6.20(a)). No referido circuito é escolhida a malha com a fonte de 60 V e as resistências de 3 Ω e 5 Ω. A equação encontrada após aplicação da lei de Kirchhoff das tensões é:

$$\begin{aligned} -U_2 + 60 + U_3 &= 0 \\ U_2 - U_3 &= 60 \end{aligned} \quad (6.29)$$

5. Três equações ((6.27), (6.28) e (6.29)) e três incógnitas. Basta solucionar o sistema e encontrar as respostas (neste caso U_1 já está calculado desde a análise nodal): $U_1 = -10$ V, $U_2 = 31,875$ V e $U_3 = -28,125$ V. Não foram solicitados os cálculos destas tensões e sim a potência relativa à resistência de 5 Ω (releia o enunciado) e para isto bastava o cálculo de U_3 , que é a tensão nos terminais do referido elemento. A potência solicitada é:

$$P_{5\Omega} = \frac{U_3^2}{5} = \frac{(-28,125)^2}{5} = 158,2 \text{ W}$$

Duas coisas seriam bem úteis para fixação do conceito de supernó: reler o texto desta seção após ter estudado o exemplo e ver a videoaula 6.11. Recomendo que faça ambas as coisas.

□

Videoaula 6.11 (Sobre o uso do supernó). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de nós quando é necessário utilizar o conceito de supernó acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/M4lXJdhdp00>



6.5.2 Análise de nós por inspeção

Assim como o método de análise de malhas por inspeção descrito na seção 6.4.4, o método de *análise de nós por inspeção* é adequado se o estudante souber álgebra matricial, então é conveniente que seja utilizado em cursos superiores.

A *análise de nós por inspeção* se aplica exclusivamente aos circuitos que tenham somente fontes de corrente ⁴, não podendo ter, portanto, fontes de tensão para que o método possa ser aplicado. Deve-se escrever um sistema matricial com a seguinte forma:

$$\mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (6.30)$$

Utiliza-se variáveis em negrito para indicar matrizes ou vetores. Na equação (6.30) tem-se:

- **G** representando a matriz de condutância. Se não lembra da definição de condutância vá diretamente para a página 23 no entorno da equação (2.4) tem uma breve explicação;
- **U** representando o vetor de tensões de nós;
- **I** representando o vetor de correntes de nós.

Tendo eles os seguintes formatos:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Para obter os elementos da diagonal principal faz-se a soma das condutâncias conectadas a cada um dos nós (por exemplo, G_{33} é o somatório dos valores de todas as condutâncias do nó 3) e os elementos

⁴Este método exige fontes de corrente independentes ou não controladas. Se houver fontes de correntes dependentes ou controladas a análise de nós por inspeção explicada não se aplica.

fora da diagonal são os negativos de cada uma das condutâncias que estão presentes entre os nós (por exemplo, G_{13} é a condutância comum aos nós 1 e 3). Saliente-se que, neste caso, N (subscrito utilizado nas equações (6.31), (6.32) e (6.33)) representa o número de nós já tirando o de referência; esta ênfase é necessária, pois em seções anteriores foi considerado que o circuito tinha N nós e a quantidade de nós sem ser o de referência era $N - 1$. **Repetindo:** N no presente caso é o número de nós, já excluindo o de referência;

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

é o vetor com as tensões de nós que se deseja encontrar;

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

é o vetor cujos valores correspondem à soma das correntes dos nós em avaliação, sendo as correntes que entram recebendo sinal positivo e as que saem sinal negativo.

A solução para este problema é facilmente encontrado realizando a operação matricial a seguir:

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I} \quad (6.34)$$

Exemplo 6.13. Encontre as tensões dos nós enumerados em relação ao de referência (ver no circuito ilustrado na figura 6.21) utilizando o método de análise de nós por inspeção.

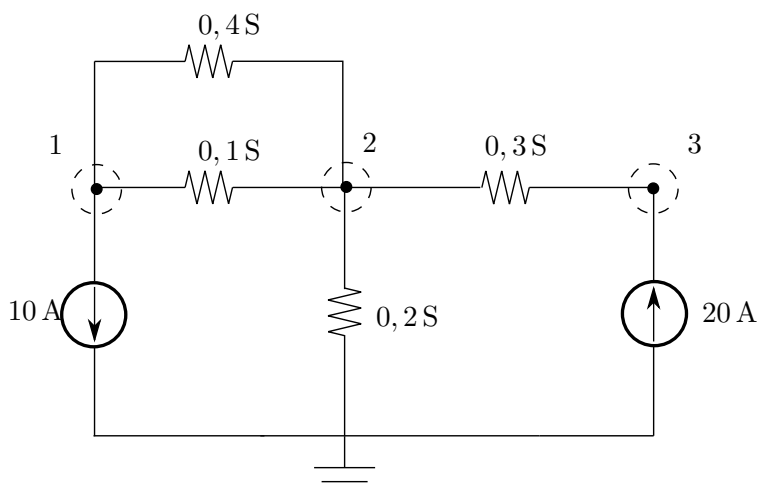


Figura 6.21: Ilustração referente ao exemplo 6.13.

Solução:

Primeiramente será encontrada a matriz de condutância, que seguindo as orientações já descritas na presente seção é:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (0,1 + 0,4) & -(0,1 + 0,4) & (0) \\ -(0,1 + 0,4) & (0,1 + 0,4 + 0,2 + 0,3) & -(0,3) \\ (0) & -(0,3) & (0,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,3 \\ 0 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

Encontra-se agora o vetor de correntes. Lembrando que deve-se considerar o valor positivo para as correntes que entram e negativo para as que saem. Encontra-se então:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -(10) \\ (0) \\ +(20) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Encontrar as tensões de cada um dos três nós em relação ao de referência ficou fácil, desde que se saiba álgebra matricial ou operar corretamente algum *software* que faça os cálculos a seguir:

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,3 \\ 0 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

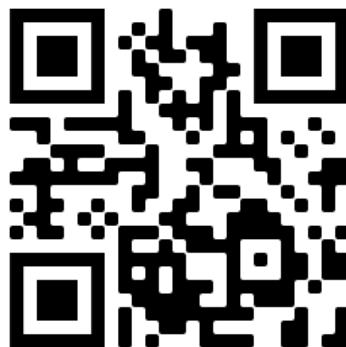
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \text{ V} \\ 50 \text{ V} \\ 116,667 \text{ V} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Na videoaula 6.12 é apresentada a teoria e um exemplo com um circuito com mais nós e fontes de corrente que o presente exemplo: vale a pena dar uma conferida no vídeo sugerido no caso de ter restado alguma dúvida sobre a explicação feita.

□

Videoaula 6.12 (Análise de nós por inspeção). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de nós por inspeção, com exemplo, acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/pPkJ9LhC2Eg>



6.6 Teorema da superposição

Em circuitos lineares, aqueles no qual a relação entre tensão e corrente é proporcional, é possível identificar a contribuição de cada uma das fontes de tensão e de corrente separadamente. A resposta final será a soma das contribuições de cada uma das referidas fontes no circuito. O *teorema da superposição* diz que valores de tensão ou corrente em qualquer parte do circuito pode ser obtida pela soma das contribuições individuais de cada uma das fontes do circuito, considerando na análise de cada fonte que as demais devem estar desligadas.

Definido o teorema, é conveniente que um procedimento sistemático seja apresentado para que seu uso ocorra com menor chance de erros. Então, quando uma solução ou análise de circuito exigir o

teorema da superposição, deve-se ter em mente que o efeito de cada fonte pode ser calculado se as demais estiverem desligadas e isto significa que:

Fontes de tensão devem ser curto circuitadas;

Fontes de corrente devem ser abertas.

Com as demais fontes desligadas pode-se proceder utilizando qualquer método de análise de circuitos já apresentado para se calcular a tensão ou corrente no ponto desejado. O uso do teorema da superposição ficará mais claro para quem estudar o exemplo 6.14.

Exemplo 6.14. Utilize o teorema da superposição para encontrar a tensão U nos terminais da resistência de 3Ω do circuito mostrado na figura 6.22(a). Deve-se calcular a tensão nos terminais da referida resistência criada devido à presença de cada uma das fontes do circuito e depois realizar a soma para encontrar o valor de U .

Nota: este circuito é o mesmo do exemplo 6.11 e, portanto, é possível comparar as respostas.

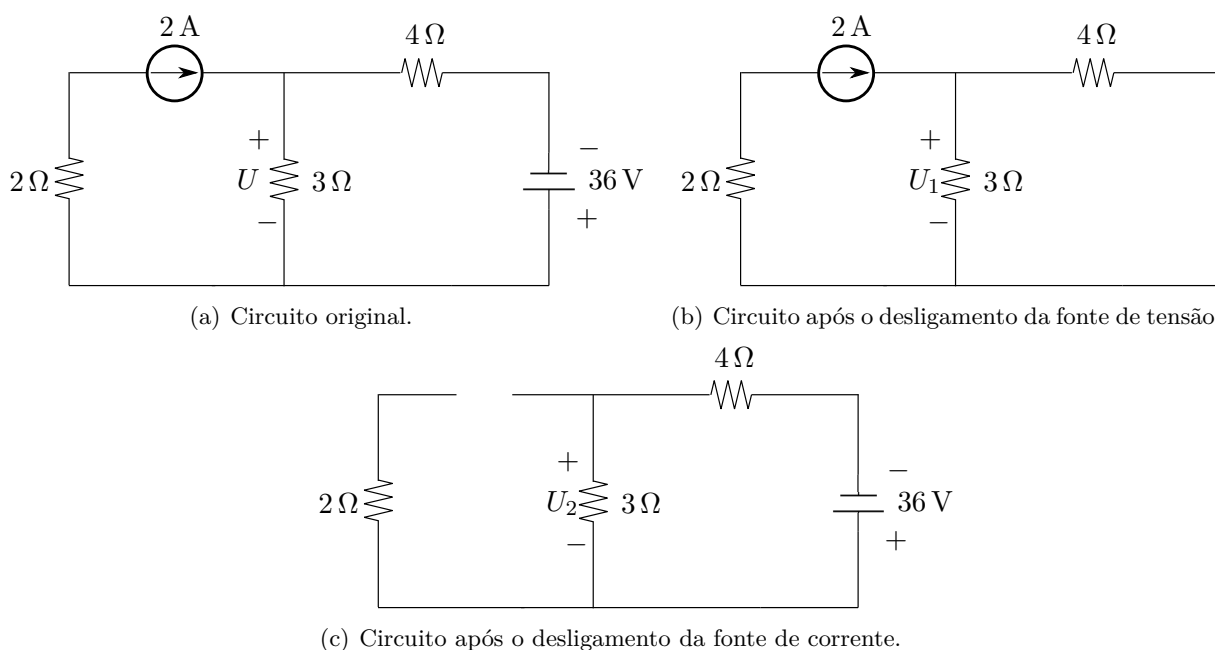


Figura 6.22: Ilustração referente ao exemplo 6.14.

Solução:

Primeiro será analisada a influência da fonte de corrente na tensão da resistência de 3Ω e para isto as demais fontes do circuito devem ser desligadas. Só há uma fonte de tensão que deve ser curto circuitada, como pode ser visto na figura 6.22(b), que tem a tensão U_1 representando a influência da fonte de corrente na resistência de 3Ω .

Qualquer método de análise de circuitos pode ser empregado, mas pode-se resolver mais facilmente se o conceito de divisor de corrente for utilizado⁵. Procedendo com os cálculos:

$$I_{3\Omega} = 2 \times \left(\frac{4}{3+4} \right)$$

$$I_{3\Omega} = \frac{8}{7} \text{ A} \approx 1,14 \text{ A}$$

⁵Se não lembra do divisor de corrente, estude novamente o conteúdo da seção 3.5.2.

A tensão U_1 pode ser encontrada substituindo o valor anterior na lei de Ohm:

$$\begin{aligned} U_1 &= 3 \times \frac{8}{7} \\ U_1 &= \frac{24}{7} \text{ V} \end{aligned} \quad (6.39)$$

O próximo passo é identificar a influência da fonte de tensão e isto exige que as demais fontes estejam desligadas. Há apenas a fonte de corrente a ser aberta, conforme mostrado no circuito da figura 6.22(c). Qualquer método de análise de circuitos pode ser utilizado, mas a tensão U_2 pode ser facilmente encontrada utilizando somente um divisor de tensão⁶. Procedendo com os cálculos:

$$\begin{aligned} U_2 &= - \left[36 \times \left(\frac{3}{3+4} \right) \right] \\ U_2 &= \frac{-108}{7} \text{ V} \end{aligned} \quad (6.40)$$

A tensão nos terminais da resistência de 3Ω depende da influência de ambas as fontes do circuito e, portanto, o seu valor pode ser calculado usando os resultados mostrados nas equações (6.39) e (6.40). Seguem os cálculos finais:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ U &= \left(\frac{24}{7} \right) + \left(-\frac{108}{7} \right) \\ U &= -\frac{84}{7} \\ U &= -12 \text{ V} \end{aligned}$$

Compare o resultado com o encontrado no exemplo 6.11 (página 110) e verá que a resposta é a mesma, só que no exemplo citado foi utilizada a técnica de análise nodal.

□

Videoaula 6.13 (Teorema da superposição em circuitos CC). Para mais informações sobre o teorema da superposição acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/ezb5oNf-a5c>



⁶Se não lembra do divisor de tensão estude novamente o conteúdo da seção 3.5.1

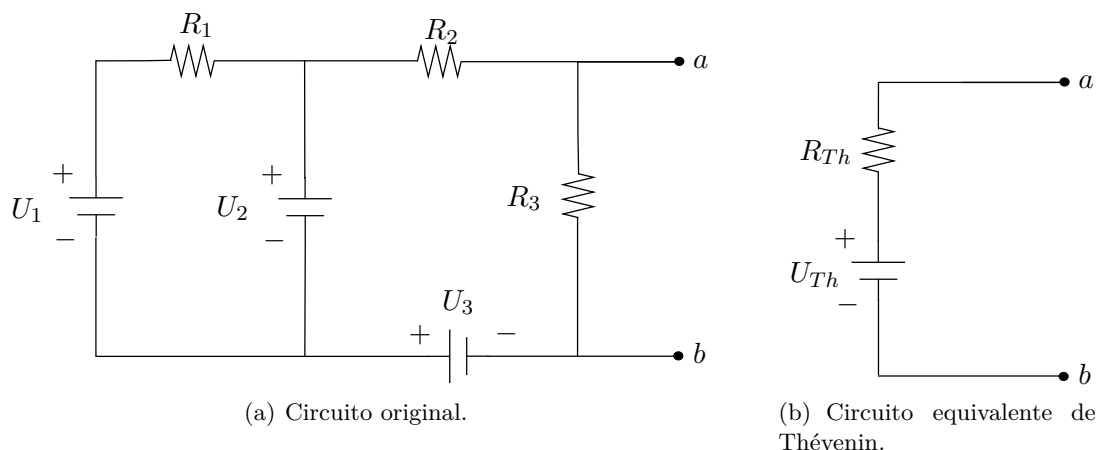


Figura 6.23: Circuitos elétricos para análise do teorema de Thévenin.

6.7 Teorema de Thévenin

O teorema de Thévenin diz que um circuito complexo pode ser substituído por outro equivalente que possui apenas uma fonte de tensão em série com uma resistência, chamadas de fonte de tensão de Thévenin e resistência equivalente de Thévenin, respectivamente. Com auxílio de algumas ilustrações, fica mais fácil de entender. Na figura 6.23(a) vê-se o circuito original que deseja-se realizar a análise (em destaque os terminais a e b). O teorema de Thévenin permite reduzir todo o circuito ao mostrado na figura 6.23(b), que é mais simples, pois é composto apenas pela fonte de tensão de Thévenin (cujo valor é U_{Th}) em série com a resistência equivalente de Thévenin (R_{Th}). Os valores das tensão e resistência equivalentes de Thévenin dependem dos terminais a partir dos quais deseja-se realizar a simplificação. No caso dos circuitos mostrados, o equivalente de Thévenin foi obtido a partir dos terminais a e b .

Para realizar a simplificação do circuito empregando o teorema de Thévenin deve-se seguir o seguinte procedimento:

1. Identificar os terminais a partir dos quais deseja-se realizar a simplificação. Neste livro os terminais serão identificados pelas letras a e b ;
2. Separar a parte do circuito que se deseja obter o circuito equivalente de Thévenin a partir dos terminais a e b , identificados no item anterior. Deste circuito deve-se calcular o valor da tensão U_{ab} , cujo valor é o da fonte de tensão de Thévenin, ou seja, $U_{Th} = U_{ab}$;
3. Calcular a resistência equivalente de Thévenin R_{Th} . Esta é a resistência equivalente vista a partir dos terminais a e b do circuito obtido no item anterior, se todas as fontes de tensão forem curto-circuitadas e todas as fontes de corrente forem abertas;
4. Desenha-se o circuito com a fonte de tensão de Thévenin e a resistência de Thévenin e pode-se utilizá-lo como um circuito equivalente ao original.

Saliente-se que o procedimento não precisa ser seguido exatamente na ordem que foi apresentado. Os exemplos a seguir ajudam a entender como simplificar os circuitos via teorema de Thévenin.

Exemplo 6.15. Um dispositivo, alimentado por um circuito conforme mostrado na figura 6.24(a), pode ser representado por uma resistência de carga R_c . Este dispositivo permite que através de uma chave modifique-se suas características, de maneira que R_c pode assumir dois valores, que são: $R_c = 1\Omega$ e $R_c = 4\Omega$. Calcule a corrente drenada pelo dispositivo considerando primeiramente que $R_c = 1\Omega$ e depois que $R_c = 4\Omega$. Use o teorema de Thévenin para simplificar os cálculos.

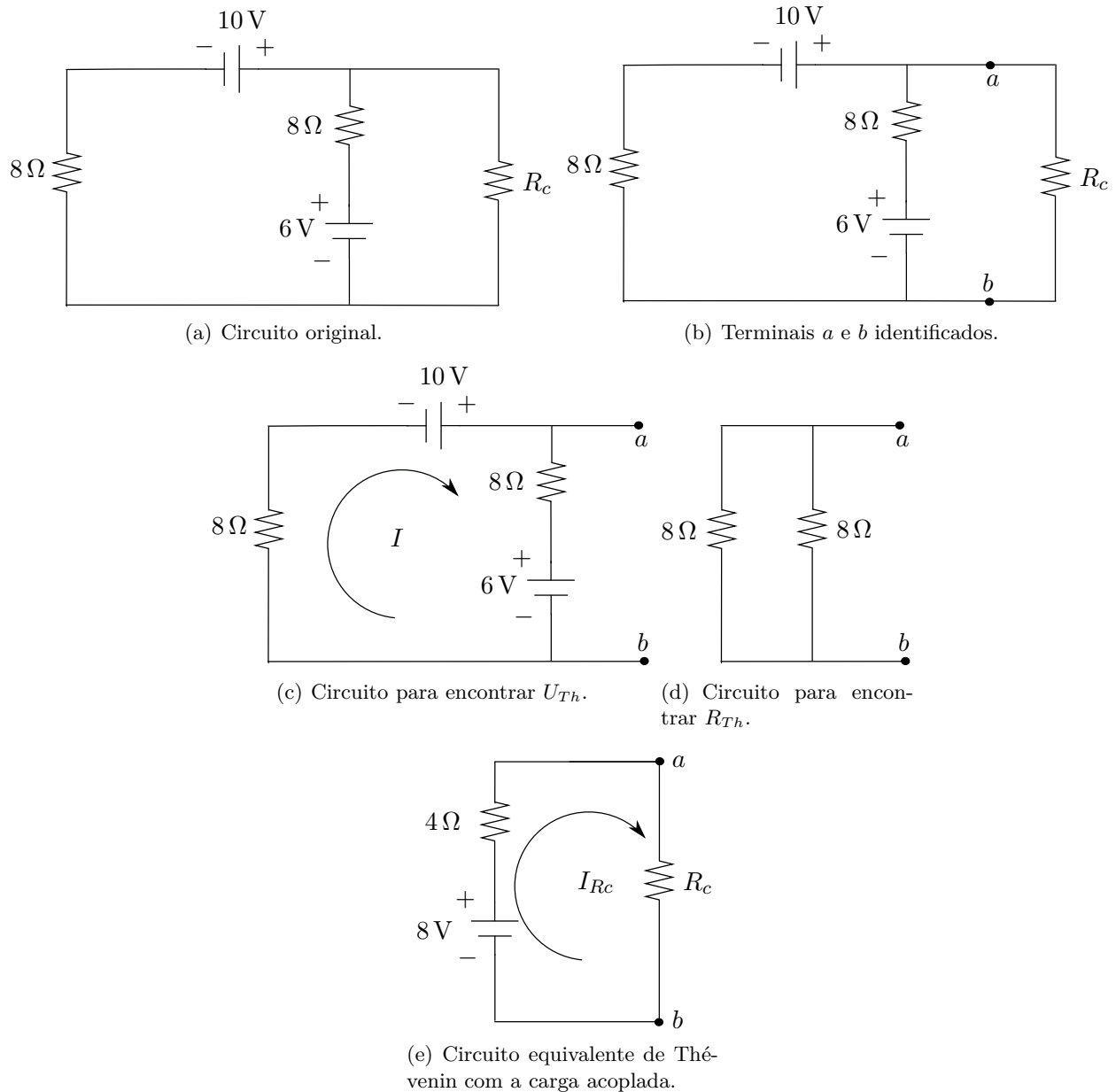


Figura 6.24: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 6.15.

Solução:

Para encontrar os valores de corrente de carga I_{R_c} , poderia ser utilizada, por exemplo, a análise de malhas: inicialmente seria calculado I_{R_c} em um circuito no qual $R_c = 1\ \Omega$ e depois calcula-se I_{R_c} em um circuito no qual $R_c = 4\ \Omega$, ou seja, dois circuitos com duas malhas deveriam ser resolvidos. Entretanto, se for utilizado o teorema de Thévenin, encontra-se um circuito simplificado, ficando fácil calcular o valor de I_{R_c} para qualquer valor de R_c especificado. Usando os passos indicados no início desta seção encontra-se o equivalente de Thévenin do circuito de alimentação da carga R_c , como é feito a seguir:

1. Na figura 6.24(b) são identificados os terminais a e b a partir dos quais deseja-se obter o equivalente de Thévenin.
2. A figura 6.24(c) mostra o circuito a partir do qual se deseja calcular o equivalente de Thévenin. O passo seguinte é encontrar U_{Th} , que é a tensão nos terminais a e b do circuito mostrado na figura 6.24(c). U_{ab} (que é igual a U_{Th}), pode ser encontrado mais facilmente se a corrente

circulante na malha for encontrada; tal corrente é mostrada no circuito da figura 6.24(c). Percorrendo a malha a partir da resistência de 8Ω mais à esquerda e empregando a lei de Kirchhoff das tensões, encontra-se:

$$\begin{aligned}8I - 10 + 8I + 6 &= 0 \\16I - 4 &= 0 \\16I &= 4 \\I &= \frac{4}{16} = 0,25 \text{ A}\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}U_{Th} &= U_{ab} = 8I + 6 \\U_{Th} &= 8(0,25) + 6 \\U_{Th} &= 2 + 6 \\U_{Th} &= 8 \text{ V}\end{aligned}$$

3. Agora deve-se calcular R_{Th} , que é a resistência equivalente entre os terminais a e b se todas as fontes de tensão forem curto-circuitadas e todas as fontes de corrente forem abertas (no presente exemplo não há fontes de corrente). A figura 6.24(d) mostra como fica o circuito com as fontes de tensão curto-circuitadas e daí conclui-se que:

$$R_{Th} = 8//8 = \frac{8}{2} = 4\Omega$$

4. Desenha-se o circuito equivalente de Thévenin mostrado na figura 6.24(e): note que a carga R_c já está conectada. Para encontrar o valor da corrente I_{Rc} na resistência que representa a carga percorre-se a malha do circuito da figura 6.24(e) a partir da fonte de tensão e encontra-se que:

$$\begin{aligned}-8 + 4I_c + R_c I_{Rc} &= 0 \\4I_c + R_c I_{Rc} &= 8 \\I_{Rc}(4 + R_c) &= 8 \\I_{Rc} &= \frac{8}{4 + R_c}\end{aligned}\tag{6.41}$$

No enunciado da questão foi solicitado que se encontrasse a corrente que atravessa a resistência da carga nos casos: $R_c = 1\Omega$ e $R_c = 4\Omega$. O valor da corrente para estes dois casos é calculado a seguir empregando a equação (6.41):

$$\begin{aligned}\text{Se } R_c = 1\Omega, \text{ então } I_{Rc} &= \frac{8}{4 + (1)} = \frac{8}{5} = 1,6 \text{ A} \\ \text{Se } R_c = 4\Omega, \text{ então } I_{Rc} &= \frac{8}{4 + (4)} = \frac{8}{8} = 1 \text{ A}\end{aligned}$$

O estudante deve ter em mente que o teorema de Thévenin é útil para simplificar a parte do circuito que se mantém inalterada quando outra parte possui parâmetros que variam, como, por exemplo, uma carga.

□

Exemplo 6.16. Determine o equivalente de Thévenin, visto dos terminais a e b , do circuito mostrado na figura 6.25(a).

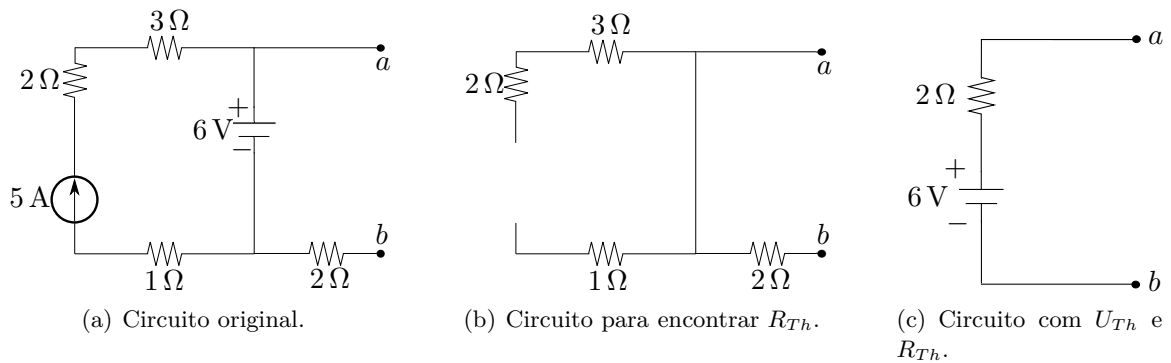


Figura 6.25: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 6.16.

Solução:

O circuito original (figura 6.25(a)) já tem identificado os terminais que se deseja encontrar o equivalente de Thévenin. O passo seguinte é encontrar U_{Th} . Da análise da figura 6.25(a) nota-se que $U_{Th} = U_{ab} = 6\text{ V}$, pois não há passagem de corrente pela resistência de 2Ω próxima ao terminal b e, portanto, não há nenhuma queda de tensão sobre ela. Resumindo:

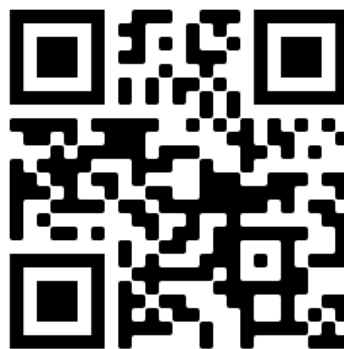
$$U_{Th} = 6\text{ V}$$

Para se determinar R_{Th} , a fonte de tensão é aberta (retirada) e a fonte de corrente é curto-circuitada, como mostrado na figura 6.25(b). Logo $R_{Th} = 2\Omega$ e o circuito equivalente de Thévenin é mostrado na figura 6.25(c).

□

Videoaula 6.14 (Teorema de Thévenin - Circuitos CC). Para mais informações sobre como utilizar o teorema de Thévenin acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/25jX5c20mGw>



6.8 Teorema de Norton

O teorema de Norton diz que um circuito complexo pode ser substituído por outro equivalente que possui apenas uma fonte de corrente em paralelo com uma resistência, chamadas de fonte de corrente de Norton (cujo valor é I_N) e de resistência equivalente de Norton (R_N), respectivamente. A figura 6.26 ilustra o teorema, evidenciando que o circuito da figura 6.26(a) é substituído pelo circuito equivalente de Norton na figura 6.26(b). Saliente-se que o valor das resistências de Thévenin e de Norton são iguais, já que são encontradas pelo mesmo procedimento.

Para realizar a simplificação do circuito empregando o teorema de Norton utiliza-se o procedimento a seguir:

1. Identificar os terminais a partir dos quais deseja-se realizar a simplificação. Neste livro os terminais serão chamados de a e b ;
2. Separar a parte do circuito que se deseja obter o circuito equivalente de Norton a partir dos terminais a e b . Encontrar a corrente I_N da fonte de corrente de Norton, sendo o seu valor a corrente entre os terminais a e b quando estes terminais estão curto circuitados;
3. Calcular a resistência equivalente de Norton R_N . Esta é a resistência equivalente visto a partir dos terminais a e b (sem curto circuito), se todas as fontes de tensão e de corrente forem desligadas, ou seja, abrir as fontes de corrente e curto circuitar as fontes de tensão. Note que $R_{Th} = R_N$;
4. Desenha-se o circuito com a fonte de corrente e a resistência de Norton e pode-se utilizá-lo como um circuito equivalente ao circuito original.

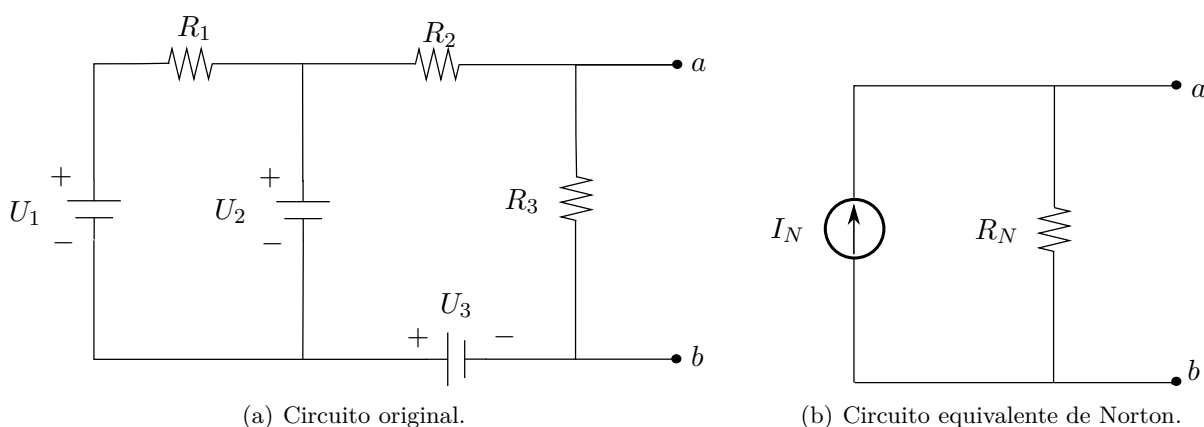


Figura 6.26: Circuitos elétricos para análise do teorema de Norton.

O exemplo a seguir ajuda no entendimento de como aplicar o teorema de Norton.

Exemplo 6.17. Resolva novamente o exemplo 6.15, agora empregando o teorema de Norton.

Solução:

O estudante deve ter lido e compreendido tanto o enunciado quanto a solução do exemplo 6.15 para que possa comparar os teoremas de Thévenin e de Norton. A solução empregando o teorema de Norton usará como base o procedimento descrito anteriormente nesta seção, como é mostrado a seguir:

1. Os terminais a partir dos quais deseja calcular o equivalente de Norton são os mesmos indicados na figura 6.24(b). Isto era esperado, pois os terminais em que se deseja realizar a simplificação do circuito são os mesmos, mudando apenas o método, que agora emprega o teorema de Norton e não mais o teorema de Thévenin;

2. O circuito que se deseja calcular o equivalente de Norton é o mesmo mostrado na figura 6.27(a). A corrente I_N é encontrada se os terminais a e b a partir dos quais se deseja calcular o equivalente de Norton são curto circuitados. A corrente que flui de a para b tem valor igual a I_N e para isto pode-se utilizar a análise de malhas. Se as correntes são indicadas no sentido horário conforme mostrado na figura 6.27(a), as equações de tensões das malhas são encontradas como mostrado na sequência.

Para a malha 1 (percorrida no sentido horário a partir da resistência de 8Ω mais à esquerda), encontra-se:

$$\begin{aligned} 8I_1 - 10 + 8(I_1 - I_2) + 6 &= 0 \\ 8I_1 + 8I_1 - 8I_2 - 10 + 6 &= 0 \\ 16I_1 - 8I_2 - 4 &= 0 \\ (16I_1 - 8I_2 = 4) (\div 4) \\ 4I_1 - 2I_2 &= 1 \end{aligned} \quad (6.42)$$

Para a malha 2, percorrida no sentido horário a partir da fonte de tensão de $6V$, encontra-se:

$$\begin{aligned} -6 + 8(I_2 - I_1) &= 0 \\ (-8I_1 + 8I_2 = 6) (\div 2) \\ -4I_1 + 4I_2 &= 3 \end{aligned} \quad (6.43)$$

Organizando as equações (6.42) e (6.43) como um sistema, encontra-se:

$$\begin{cases} 4I_1 - 2I_2 = 1 \\ -4I_1 + 4I_2 = 3 \end{cases} \quad (6.44)$$

A esta altura imagina-se que o estudante tenha maturidade e conhecimento para solucionar um sistema de equações, portanto, os detalhes desta solução serão omitidos: vê-se inclusive que a aplicação do método da adição é bem adequado e se obtém o único valor que é de interesse, que é o I_2 . Os valores das correntes do sistema descrito na equação (6.44) são $I_1 = 1,25\text{ A}$ e $I_2 = 2\text{ A}$. Uma breve olhada no circuito da figura 6.27(a) evidencia que $I_N = I_2 = 2\text{ A}$;

3. A resistência de Norton é calculada da mesma maneira que a de Thévenin, portanto, deve-se curto circuitar todas as fontes de tensão e abrir todas as fontes de corrente (neste exemplo o circuito em questão não possui fontes de corrente). Após estes procedimentos o circuito fica como o mostrado na figura 6.24(d), resultando em uma resistência de Norton de:

$$R_N = 8//8 = \frac{8}{2} = 4\Omega$$

4. Obtidos os valores de R_N e I_N pode-se desenhar o circuito simplificado e a carga acoplada, como mostrado na figura 6.27(b). Deve-se então tratar de duas situações: quando $R_c = 1\Omega$ e quando $R_c = 4\Omega$. Usando o divisor de corrente, encontra-se:

$$I_c = \left(\frac{4}{4 + R_c} \right) I_N = I_c = \left(\frac{4}{4 + R_c} \right) 2 = \frac{8}{4 + R_c}$$

Assim:

$$\text{Se } R_c = 1\Omega, \text{ então } I_c = \frac{8}{4 + (1)} = \frac{8}{5} = 1,6\text{ A}$$

$$\text{Se } R_c = 4\Omega, \text{ então } I_c = \frac{8}{4 + (4)} = \frac{8}{8} = 1\text{ A}$$

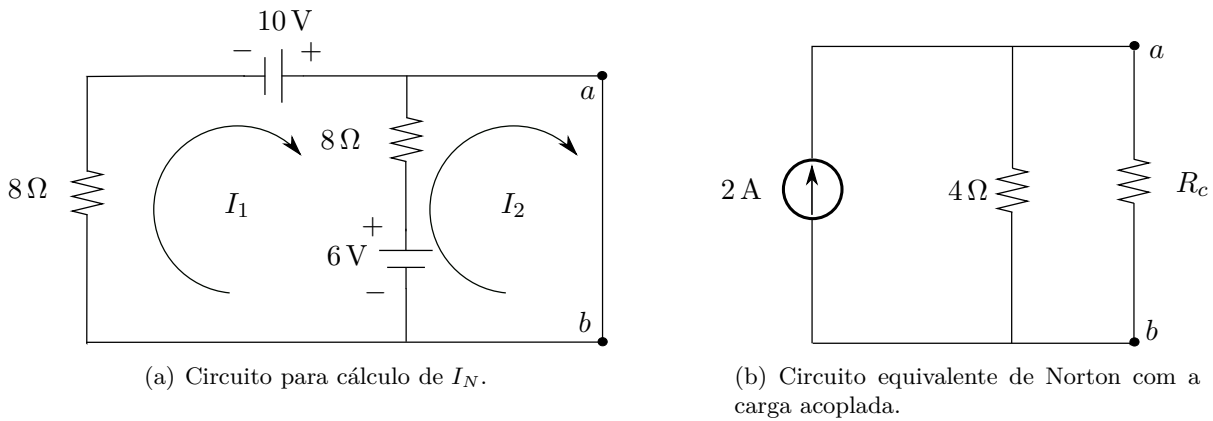


Figura 6.27: Circuitos elétricos para análise do teorema de Thévenin.

As respostas são, como esperado, as mesmas do exemplo 6.15.

O estudante deve compreender que a finalidade do teorema de Norton é a mesma do teorema de Thévenin, ou seja, ambos simplificam a parte de um circuito que se mantém inalterada.

□

Exemplo 6.18. Determine o circuito equivalente de Norton para o circuito do exemplo 6.16 mostrado na figura 6.25(a).

Solução:

Para achar I_N deve-se encontrar a corrente I_{ab} quando os terminais a e b são curto-circuitados. Isto é feito como mostrado na figura 6.28(a). Analisando a malha 2, encontra-se:

$$2I_2 - 6 = 0$$

$$2I_2 = 6$$

$$I_2 = 3 \text{ A}$$

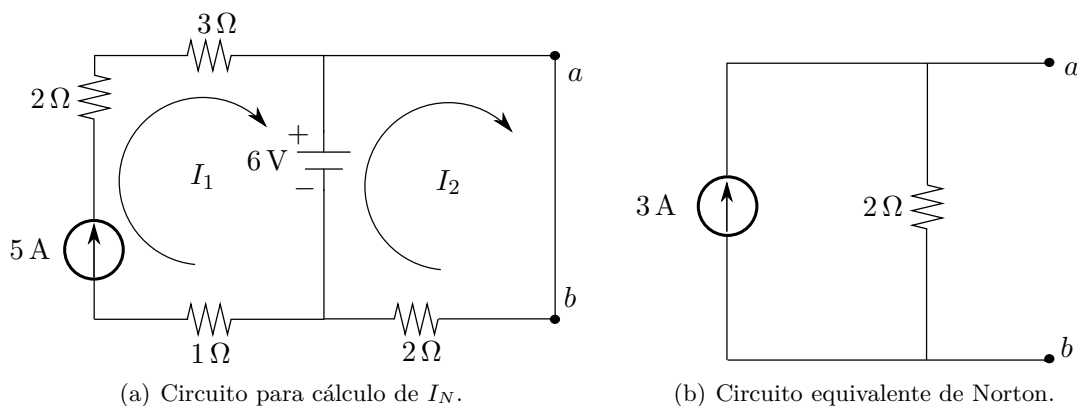


Figura 6.28: Circuito relativo ao exemplo 6.18.

Como $I_2 = I_{ab} = I_N = 3 \text{ A}$, é desnecessário analisar a malha 1. O passo seguinte é encontrar R_N .

Como já foi dito anteriormente, R_N deve ser calculado da mesma forma que R_{Th} . Logo, o resultado será o mesmo que o encontrado na solução do exemplo 6.16, ou seja:

$$R_N = 2 \Omega$$

O circuito equivalente de Norton é mostrado na figura 6.28(b).

□

Videoaula 6.15 (Teorema de Norton - Circuitos CC). Para mais informações sobre como utilizar o teorema de Norton acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/7iVAziWp9b8>



6.9 Relações entre os teoremas de Thévenin e de Norton

O circuito equivalente de Thévenin ou de Norton pode ser utilizado para o mesmo propósito, que é simplificar um circuito complexo e substituí-lo por outro com apenas dois elementos: uma resistência e uma fonte. A figura 6.29 relembra ao estudante ambos os circuitos equivalentes.

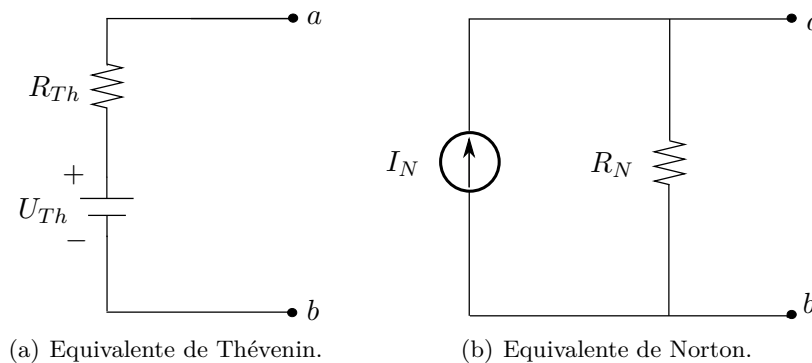


Figura 6.29: Circuitos equivalentes de Thévenin e de Norton.

Uma característica destes circuitos equivalentes é que um pode ser obtido a partir do outro e para isto basta utilizar as seguintes relações:

$$\begin{cases} R_{Th} = R_N \\ U_{Th} = R_N I_N \end{cases} \quad (6.45)$$

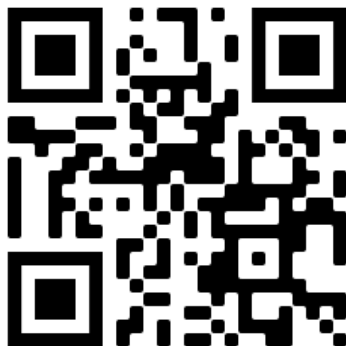
Pode-se verificar os resultados dos exemplos 6.15 e 6.17, nos quais foi necessário calcular, respectivamente, o circuito equivalente de Thévenin e de Norton. Nestes exemplos os valores encontrados para

R_{Th} e R_N foram iguais: 4Ω . Em relação às fontes encontrou-se: $U_{Th} = 8\text{ V}$ e $I_N = 2\text{ A}$, ou seja, $U_{Th} = R_N \times I_N = 4 \times 2 = 8\text{ V}$ (resultado esperado pela equação (6.45)).

Videoaula 6.16 (Relações entre os teoremas de Thévenin e de Norton - Circuitos CC).

Para mais detalhes sobre como se dá a relação entre os teoremas de Thévenin e de Norton acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/fxZUawwa--Q>



6.10 Resumo do capítulo

Foram muitas as técnicas apresentadas no presente capítulo, então é conveniente que as questões de maior destaque sejam logo apresentadas:

- As leis de Kirchhoff são duas, sendo que a das correntes diz que o somatório das correntes que entram em um nó é igual ao somatório das correntes que saem deste mesmo nó. A segunda, a lei das tensões, diz que o somatório das d.d.p. de um laço é sempre igual a zero;
- A análise de malhas é um método que utiliza a lei de Kirchhoff das tensões para encontrar as equações e depois solucionar o sistema. O resultado obtido é o valor das correntes circulantes em cada uma das malhas;
- A análise de nós é um método que utiliza a lei de Kirchhoff das correntes para encontrar as equações e depois solucionar o sistema. O resultado obtido é o valor das tensões em cada um dos nós em relação ao nó de referência;
- Fontes de tensão associadas em série aumentam os valores da tensão e da potência disponibilizadas, enquanto que fontes de tensão associadas em paralelo aumentam o valor da potência disponibilizada e mantém o valor da tensão igual ao de cada fonte individual. As fontes associadas em paralelo devem ter a mesma tensão;
- Placas fotovoltaicas são uma fonte renovável de energia e possuem curva característica $U \times I$ não linear, porém podem ser aproximadas por fontes de tensão ideais em certas análises específicas;
- As técnicas de análises de malha e de nós por inspeção permitem que ao olhar e interpretar o circuito sejam escritas equações matriciais que permitem encontrar todos os valores de correntes de malha ou tensões de nós (em relação ao nó de referência). Os métodos por inspeção são limitados, pois não é possível utilizar nenhuma das duas no caso do circuito possuir fontes de tensão e de corrente, nem pode haver fontes controladas de qualquer tipo;

- A supermalha e o supernó são casos particulares das análises por malha e por nós, respectivamente. A supermalha é utilizada quando há uma fonte de corrente entre duas malhas e o supernó quando há uma fonte de tensão entre dois nós;
- O teorema de Thévenin permite transformar um circuito complexo em um mais simples que é composto apenas por uma fonte de tensão em série com uma resistência; já o teorema de Norton permite transformar um circuito complexo em um mais simples que é composto apenas por uma fonte de corrente em paralelo com uma resistência;
- Os circuitos equivalentes obtidos utilizando os teoremas de Thévenin e de Norton, se relacionam como descrito pelas equações $R_{Th} = R_N$ e $U_{Th} = R_N \times I_N$. Dessa maneira, o circuito equivalente de Thévenin pode ser encontrado a partir do circuito equivalente de Norton e vice-versa.

Problemas propostos

Problema 6.1. Encontre o valor da corrente I_x identificada nos circuitos da figura 6.30 utilizando análises de malha ou nodal.

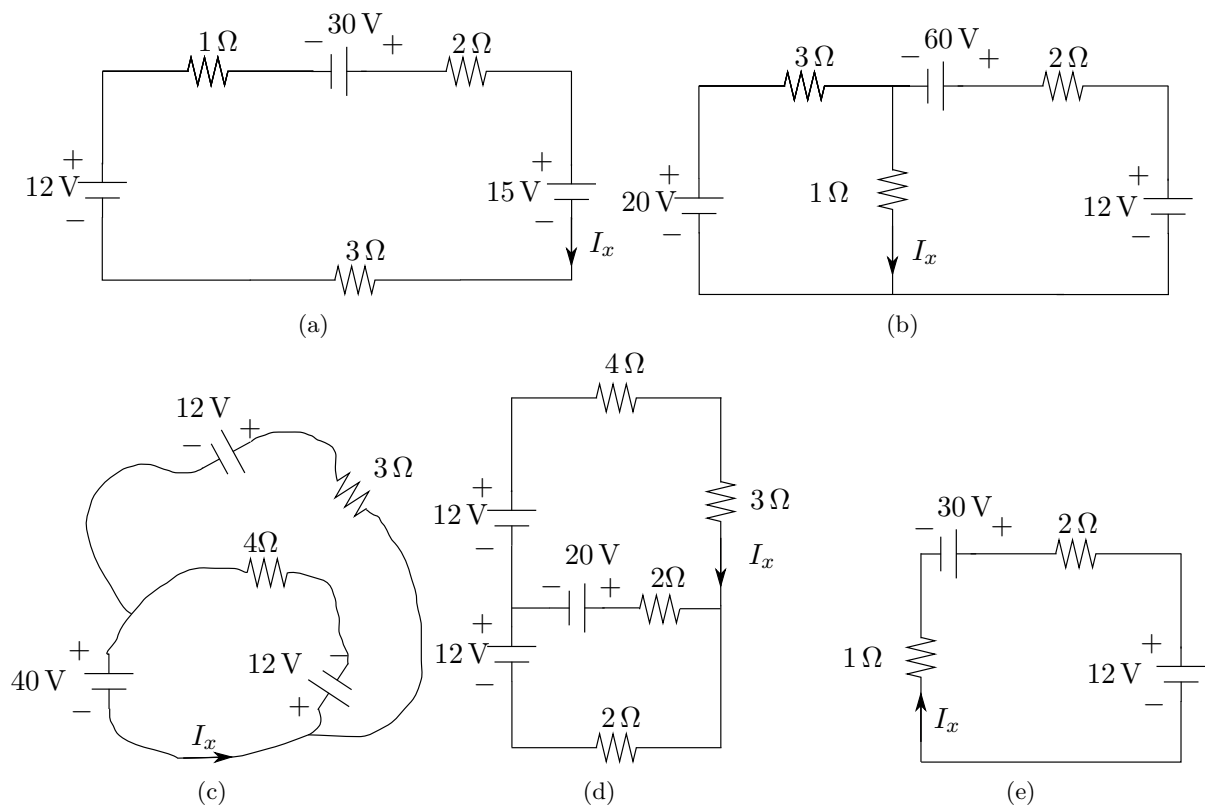


Figura 6.30: Circuitos elétricos relativos ao problema 6.1.

Problema 6.2. Um técnico possui no estoque placas fotovoltaicas de 12 V e cada unidade pode fornecer no máximo 1 kW. Um cliente solicitou a este técnico um sistema de alimentação que permitisse alimentar um dispositivo resistivo com uma d.d.p. de 60 V e que consumisse uma potência de 9 kW. De que forma o técnico deve associar as placas fotovoltaicas de 12 V para obter o sistema requisitado pelo cliente? Obs.: indicar na resposta o número de placas fotovoltaicas utilizadas e como elas devem ser associadas.

Problema 6.3. Considere que os painéis de um certo fabricante são constituídos de células fotovoltaicas de 1 V e 10 W. Determine qual deve ser a configuração de células para que se tenha:

(a) Pannel de 12 V e 120 W;

(b) Pannel de 24 V e 480 W;

(c) Pannel de 12 V e 960 W.

Problema 6.4. Para cada circuito da figura 6.31, determine o valor das correntes I_1 , I_2 e I_3 e calcule a potência fornecida (P_F) e a potência consumida (P_C) totais. **Obs.:** o estudante deve lembrar que as resistências são elementos que consomem a potência, enquanto que as fontes de tensão podem fornecer (se o sentido da corrente que as atravessa vai do terminal $-$ para o $+$) ou podem consumir (se o sentido da corrente que as atravessa vai do terminal $+$ para o $-$).

Nota: o problema pode ser resolvido usando a análise por malhas, a análise de malhas por inspeção, análise nodal ou utilizando o teorema da superposição (analisando a influência de cada fonte separadamente e depois somando os valores encontrados). Resolva por todos os métodos que estiver estudando!

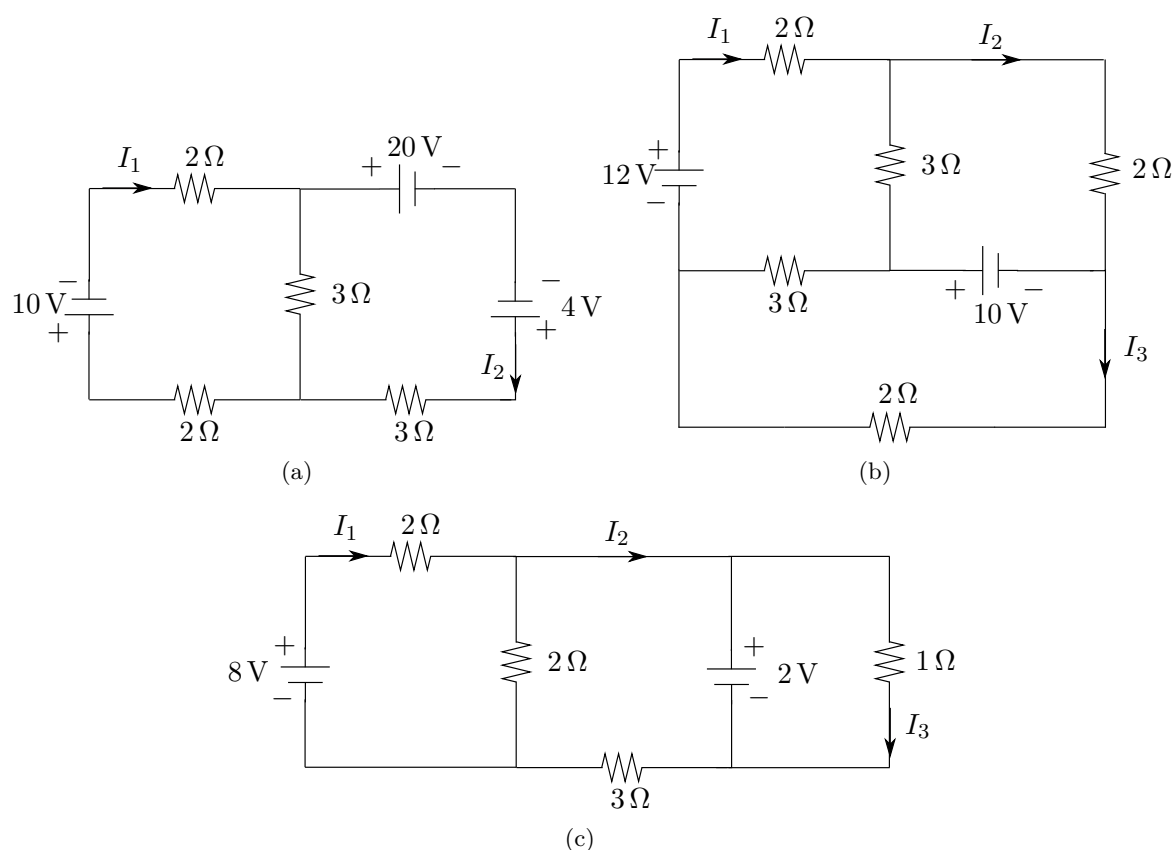


Figura 6.31: Circuitos elétricos relativos ao problema 6.4.

Problema 6.5. Determine a potência relacionada à resistência de 1Ω do circuito mostrado na figura 6.32.

Dica: utilize o método de análise nodal ou análise nodal por inspeção para determinar a tensão nos terminais da referida resistência e depois calcule a potência.

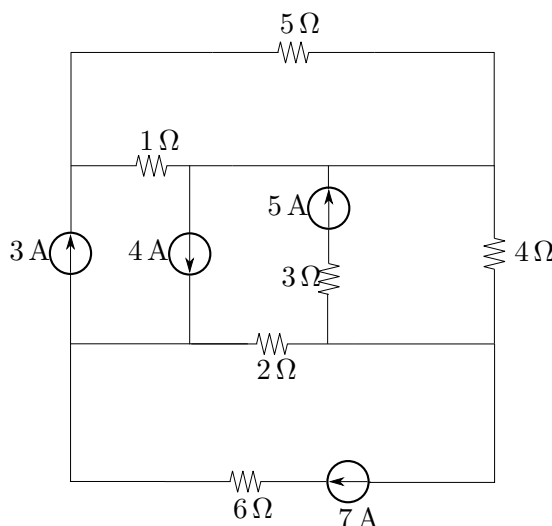


Figura 6.32: Circuito relativo ao problema 6.5.

Problema 6.6. Determine o circuito equivalente de Thévenin visto pelos terminais a e b nos circuitos da figura 6.33.

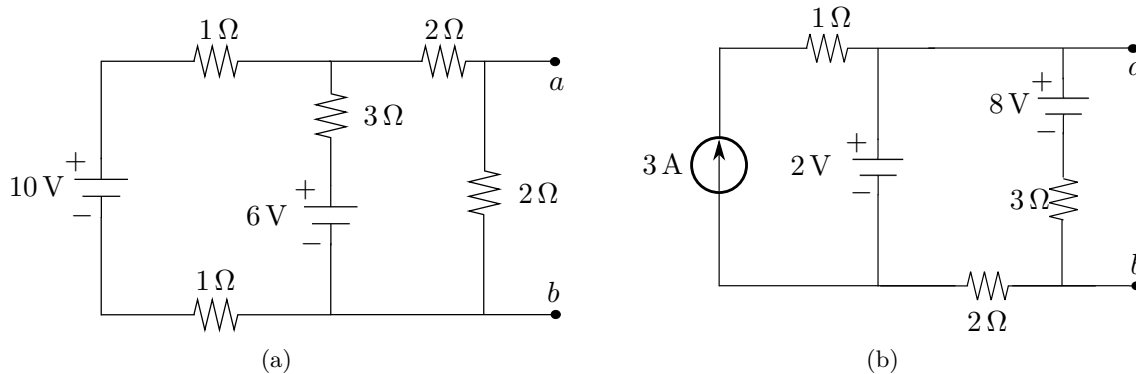


Figura 6.33: Circuitos elétricos relativos ao problema 6.6.

Problema 6.7. Determine o circuito equivalente de Norton visto pelos terminais a e b nos circuitos da figura 6.34.

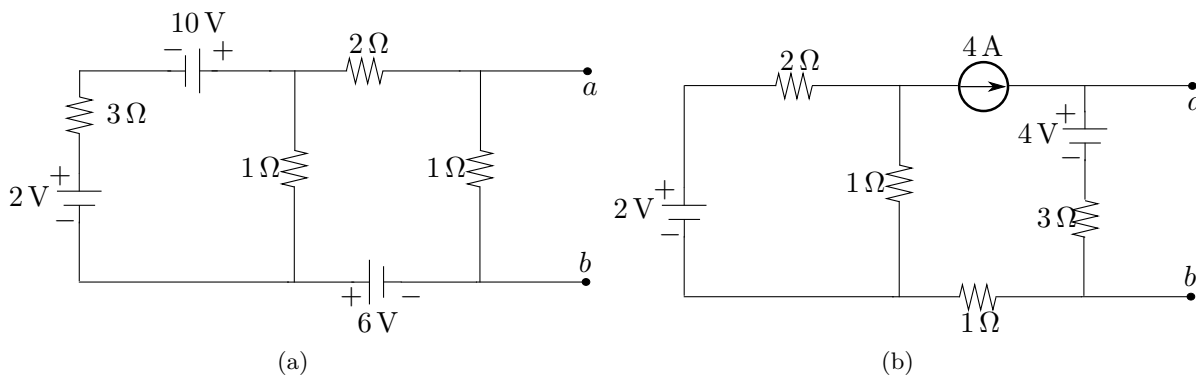


Figura 6.34: Circuitos elétricos relativos ao problema 6.7.

Problema 6.8. Usando o teorema de Thévenin ou de Norton encontre o valor da corrente I_c e da tensão U_c indicadas na figura 6.35, considerando que $R_c = 2\Omega$, $R_c = 4\Omega$ e $R_c = 6\Omega$.

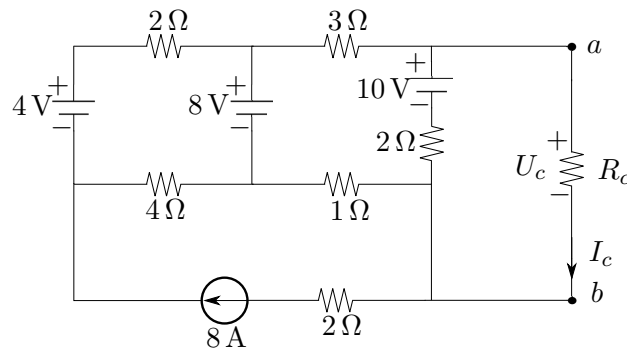


Figura 6.35: Circuito relativo ao problema 6.8.

Problema 6.9. Calcule o valor da potência consumida pela carga representada pela resistência R_c mostrada no circuito da figura 6.36, primeiramente quando $R_c = 3\Omega$ e depois quando $R_c = 9\Omega$.

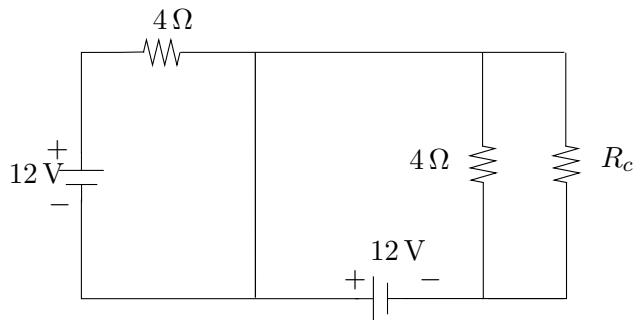


Figura 6.36: Circuito relativo ao problema 6.9.

Capítulo 7

Energia, eficiência e tarifação

7.1 Introdução

As instalações e os equipamentos industriais são projetados para realizar tarefas consumindo a menor quantidade possível de energia elétrica com o propósito de diminuir a conta mensal paga à concessionária. Ainda que os sistemas de fornecimento de energia elétrica sejam em tensão alternada senoidal (como é mostrado em capítulos posteriores), a análise de custo com energia elétrica com alimentação em tensão contínua oferece ao estudante uma boa base para entender como funciona o sistema de tarifação adotado na realidade.

7.2 Energia elétrica

Define-se como *energia* a grandeza que mensura a capacidade de certo dispositivo realizar uma tarefa ou trabalho. Dentre os dispositivos elétricos que mais consomem energia elétrica destaca-se o motor elétrico, cuja função é transformar a energia elétrica em energia mecânica. Ao se fazer uma vitamina de banana usando um liquidificador, há transformação de energia elétrica em energia mecânica, pois o eixo do motor é acoplado às lâminas que cortam a fruta e misturam todos os ingredientes.

A figura 7.1 ilustra a construção de um motor elétrico elementar. Esta ilustração destaca:

O estator: parte que fica estática, ou seja, não se move;

O rotor: parte que gira fornecendo potência mecânica;

O eixo: que está soldado no rotor e é a parte na qual se acopla a carga mecânica (no caso, por exemplo, do liquidificador, são acopladas as lâminas);

Os terminais de alimentação: nestes é conectada uma fonte de tensão (a rede elétrica, um banco de baterias ou um conversor eletrônico de potência) para fornecer potência elétrica ao motor.

Esta ilustração de um motor é bastante superficial, já que o dispositivo real possui bobinas e os desenhos do rotor e do estator podem ser, a depender do projeto, bem diferentes do mostrado na figura 7.1. A alimentação do motor pode ser feita pela bobina do estator ou do rotor, a depender do tipo do projeto. Nenhum destes detalhes é importante neste instante.

Outros usos da energia elétrica são destacados a seguir:

- Dispositivos elétricos que têm como função aquecer líquidos como, por exemplo, o chuveiro elétrico (que transforma energia elétrica em térmica, aquecendo a água);
- O aparelho de som (que transforma sinais elétricos em ondas mecânicas sonoras) etc.

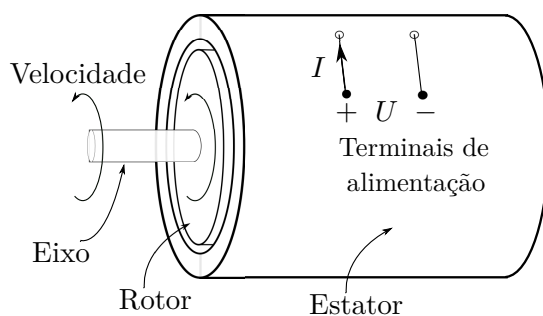


Figura 7.1: Ilustração básica de um motor elétrico.

A unidade para mensurar a energia E no Sistema Internacional de Unidades é o Joule ou simplesmente J. Entretanto, entre os profissionais da área de eletrotécnica, a unidade mais utilizada é o $\text{kW} \times \text{h}$ (quilowatt-hora). Saliente-se que $1 \text{kW} \times \text{h} = 360\,000 \text{ J}$.

A variável potência já foi utilizada neste livro anteriormente e ela representa a quantidade de energia consumida em um certo intervalo de tempo ($P = dE/dt \approx E/\Delta t$), portanto, a energia E é dada por:

$$E = P \times \Delta t \quad (7.1)$$

Sendo Δt o intervalo de tempo no qual o dispositivo consome potência elétrica, que no contexto deste capítulo é a potência média. Caso a potência instantânea fosse utilizada seria necessário utilizar o cálculo diferencial e integral e isto foge ao escopo do presente texto.

Um exemplo numérico deve ajudar a entender um pouco sobre estes conceitos.

Exemplo 7.1. Uma pequena indústria possui um dispositivo de grande potência que é responsável por praticamente todo o consumo de energia elétrica da instalação. Sabendo que este dispositivo consome da rede elétrica uma potência média de $80\,000 \text{ W}$ e que ele fica ligado das 8 h da manhã até o meio-dia e depois das 14 h até às 18 h, calcule o consumo de energia elétrica mensal do mesmo em $\text{kW} \times \text{h}$.

Solução:

Para encontrar o consumo mensal de energia pode-se inicialmente encontrar o tempo que o dispositivo fica ligado por mês. Em um dia o dispositivo fica ligado 8 h (4 h pela manhã e 4 h pela tarde). Em um mês ele fica ligado $30 \times 8 \text{ h} = 240 \text{ h}$, portanto, $\Delta t = 240 \text{ h}$. A energia mensal é:

$$\begin{aligned} E &= P \times \Delta t \\ E &= 80\,000 \text{ W} \times 240 \text{ h} \\ E &= 80 \text{ kW} \times 240 \text{ h} \\ E &= 19\,200 \text{ kW} \times \text{h} \end{aligned}$$

Saliente-se que no cálculo da energia o valor de potência foi transformado de W para kW para que no resultado final fosse encontrado o valor de E em $\text{kW} \times \text{h}$, como solicitado no enunciado da questão.

O resultado poderia ser escrito como $19,2 \text{ MW} \times \text{h}$, o que está correto, pois o $\text{MW} \times \text{h}$ (megawatt-hora) é uma outra forma de se expressar o valor da potência no meio dos profissionais de eletrotécnica, porém apenas é utilizada quando é feita análise de usinas geradoras e consumidores de grande porte.

□

7.3 Potência elétrica

Apesar da unidade de potência mais utilizada pelos profissionais da área de eletrotécnica ser o watt (W), profissionais de outras áreas (em especial, a mecânica) têm por hábito utilizar outras unidades

como, por exemplo, o cavalo-vapor (cv) e o horse-power (HP). A transformação entre as unidades de potência devem ser efetuadas considerando que:

- $1 \text{ HP} = 745,7 \text{ W}$;
- $1 \text{ cv} = 735,5 \text{ W}$.

Exemplo 7.2. Transforme os valores de potência dados a seguir em kW.

- (a) 15 cv
- (b) 25 HP
- (c) 0,5 HP
- (d) 2 000 cv

Solução:

Para modificar a unidade da potência para W, basta ter em mente que $1 \text{ HP} = 745,7 \text{ W}$ e $1 \text{ cv} = 735,5 \text{ W}$.

$$(a) \ 15 \text{ cv} = 15 \text{ cv} \times \frac{735,5 \text{ W}}{1 \text{ cv}} = 11\,032,5 \text{ W} \approx 11,03 \text{ kW}$$

$$(b) \ 25 \text{ HP} = 25 \text{ HP} \times \frac{745,7 \text{ W}}{1 \text{ HP}} = 18\,642,5 \text{ W} \approx 18,64 \text{ kW}$$

$$(c) \ 0,5 \text{ HP} = 0,5 \text{ HP} \times \frac{745,7 \text{ W}}{1 \text{ HP}} = 372,85 \text{ W} \approx 0,37 \text{ kW}$$

$$(d) \ 2\,000 \text{ cv} = 2\,000 \text{ cv} \times \frac{735,5 \text{ W}}{1 \text{ cv}} = 1\,471\,000 \text{ W} \approx 1\,47 \text{ kW}$$

□

7.4 Eficiência (rendimento)

A *eficiência*, também chamada de *rendimento*, é uma medida do quanto um determinado equipamento usa da potência absorvida da alimentação (rede elétrica, por exemplo) para realizar a tarefa para o qual foi projetado. A ilustração da figura 7.2 mostra o balanço energético de um dispositivo genérico. Nesta figura vê-se que parte da potência de entrada P_e é utilizada para realizar o trabalho (potência útil ou de saída P_s) e parte é perdida (desperdiçada), representada pela potência de perdas P_p .

Tomando o balanço energético de um automóvel como exemplo, pode-se esclarecer melhor o conceito de eficiência. Ao abastecer um automóvel é fornecida pelo combustível certa quantidade de energia para que ele possa gerar potência mecânica e movimentar-se. Uma parcela da potência é utilizada para os propósitos reais do automóvel (movimentar-se, ter iluminação interna e externa, condicionar a temperatura interna via ar-condicionado etc.) e uma outra parcela é desperdiçada. Ao tocar na carroceria próxima ao motor, qualquer um pode verificar que ela estará aquecida; isto se deve ao atrito entre as peças móveis do motor. Obviamente o motor é feito para fornecer potência mecânica para fazer o automóvel movimentar-se e não para aquecer-se, portanto, é considerado que a energia térmica resultante do atrito das peças móveis no motor é uma perda. Um automóvel ideal transformaria toda a energia contida no combustível em algo útil (seja o movimento, a iluminação, a regulação da temperatura via ar-condicionado etc.), porém não há dispositivos ideais e uma parcela da energia é sempre perdida.

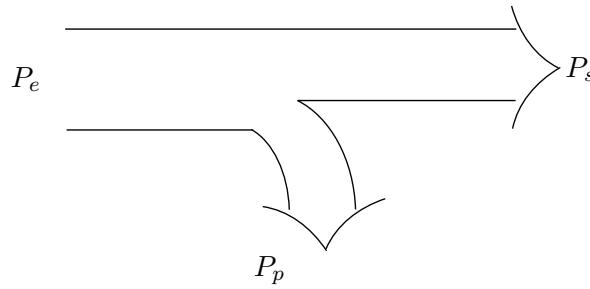


Figura 7.2: Balanço de energia em um dispositivo. P_e , P_s e P_p representam, respectivamente, as potências de entrada, de saída e de perdas.

O índice chamado de eficiência ou rendimento é o que mensura o quanto um dispositivo aproveita da potência que lhe foi fornecida e é representado pela letra grega η e pode ser escrito como:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \quad (7.2)$$

Sendo P_s e P_e as potências de saída e de entrada, respectivamente. Deve-se observar que η é uma grandeza adimensional, ou seja, não possui unidade. No caso de um motor elétrico, P_e é a potência elétrica consumida da rede, enquanto P_s , é a potência mecânica disponível no eixo do motor. Tendo em mente que a potência de entrada P_e é convertida em potência de saída P_s e em potência de perdas P_p , ou seja, $P_e = P_s + P_p$, a equação (7.2) pode ser reescrita como:

$$\eta = \frac{P_e - P_p}{P_e} \quad (7.3)$$

A maneira usual de se representar a eficiência de um dispositivo é empregando o rendimento em porcentagem ($\eta\%$). Por exemplo, em relação ao rendimento de um motor pode-se dizer que ele possui valores de $\eta = 0,8$ ou $\eta\% = 80\%$. Isto quer dizer que 80% da potência elétrica consumida (potência de entrada) é transformada em trabalho mecânico (potência de saída) e 20% é transformada em perdas (atrito de partes móveis, efeito Joule nos condutores e perdas magnéticas nos núcleos).

Exemplo 7.3. Um motor opera ligado à rede elétrica de 220 V, com uma potência de saída de 30 HP e possui rendimento de 80 %. Calcule o valor da corrente elétrica que o motor consome da rede.

Solução:

De início deve-se encontrar a potência de entrada (consumida pelo motor da rede elétrica) em watt. Da equação (7.2), encontra-se que:

$$P_e = \frac{P_s}{\eta} = \frac{30}{0,8} = 37,5 \text{ HP}$$

Modificando a unidade de P_e para W:

$$P_e = 37,5 \text{ HP} \times \frac{745,7 \text{ W}}{1 \text{ HP}} = 27\,963,8 \text{ W}$$

A potência elétrica de entrada é dada por $P_e = UI$, portanto:

$$I = \frac{P_e}{U} = \frac{27\,963,8}{220} = 127,11 \text{ A}$$

□

Videoaula 7.1 (Relação entre potência e eficiência energética). Para mais detalhes e exemplo da relação entre potência elétrica e eficiência acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/qQSsfmxqWk0>



7.5 Tarifação

As concessionárias de energia elétrica fornecem aos consumidores tensões alternadas, portanto, um estudo mais rigoroso de tarifação exige que conceitos de circuitos em tensão e corrente elétrica alternadas sejam utilizados, como será mostrado em capítulos posteriores. Entretanto, os cálculos relacionados à tarifação de energia elétrica são mais simples em circuitos de tensão e corrente elétrica contínuas, por isso, o estudo desta seção é importante. Além do mais, muitas indústrias possuem redes internas em tensão contínua e os custos com energia elétrica são calculados conforme é apresentado na sequência desta seção.

Conforme dito na seção 7.2, a unidade mais comum para a grandeza energia no meio dos profissionais de eletrotécnica é o $\text{kW} \times \text{h}$ e é por cada unidade de $\text{kW} \times \text{h}$ consumido que o cliente tem que pagar. Portanto, a tarifa $T_{R\$}$ é dada em $\text{R\$}/(\text{kW} \times \text{h})$. A conta da energia elétrica consumida $C_{R\$}$ é:

$$C_{R\$} = T_{R\$} \times E \quad (7.4)$$

Veja o exemplo que segue para entender melhor como utilizar as expressões apresentadas.

Exemplo 7.4. Uma fábrica possui dois motores, chamados de *A* e *B*. O motor *A* opera com potência de saída de 10 cv, possui rendimento de 75% e fica ligado 20 h por dia. O motor *B* opera com potência de saída de 20 HP, possui rendimento de 80% e fica ligado 10 h por dia. Sabendo que a tarifa é de $\text{R\$ } 0,30/\text{kW} \times \text{h}$, calcule a conta mensal de energia desta fábrica.

Solução:

Precisa-se, em princípio, calcular os valores de energia elétrica consumidas da rede por ambos os motores.

Motor A Sua potência de entrada é dada por:

$$P_{eA} = \frac{P_{sA}}{\eta_A} = \frac{10 \text{ cv}}{0,75} = 13,333 \text{ cv}$$

Em kW, P_{eA} é:

$$P_{eA} = 13,333 \text{ cv} \times \frac{736 \text{ W}}{1 \text{ cv}} = 9806,6 \text{ W} = 9,81 \text{ kW}$$

Sabendo que o motor *A* fica ligado 20 h/dia, então o tempo mensal em operação é $\Delta t_{mA} = 20 \times 30 = 600 \text{ h}$. A energia consumida em um mês é:

$$E_A = P_{eA} \times \Delta t_A = 9,81 \text{ kW} \times 600 \text{ h} = 5886 \text{ kW} \times \text{h}$$

Motor B Sua potência de entrada é dada por:

$$P_{eB} = \frac{P_{sB}}{\eta_B} = \frac{20 \text{ HP}}{0,8} = 25 \text{ HP}$$

Em kW, P_{eB} é:

$$P_{eB} = 25 \text{ HP} \times \frac{745,5 \text{ W}}{1 \text{ HP}} = 18\,642,5 \text{ W} = 18,64 \text{ kW}$$

Sabendo que o motor B fica ligado 10 h/dia, então o tempo ligado por mês é $\Delta t_{mA} = 10 \times 30 = 300 \text{ h}$. A energia consumida em um mês é:

$$E_B = P_{eB} \times \Delta t_B = 18,64 \text{ kW} \times 300 \text{ h} = 5\,592 \text{ kW} \times \text{h}$$

A energia elétrica total consumida da rede é:

$$E_{total} = E_A + E_B = 5\,886 \text{ kW} \times \text{h} + 5\,592 \text{ kW} \times \text{h} = 11\,478 \text{ kW} \times \text{h}$$

A conta mensal é dada pela equação (7.4), assim encontra-se:

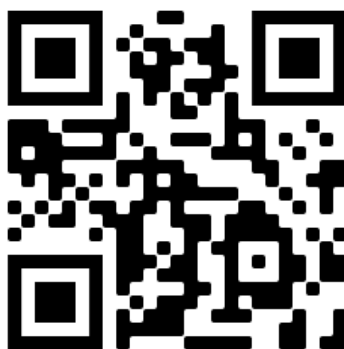
$$C_{R\$} = T_{R\$} \times E_{total} = \left(\frac{R\$ 0,30}{\text{kW} \times \text{h}} \right) \times (11\,478 \text{ kW} \times \text{h})$$

$$C_{R\$} = R\$ 3.443,40$$

□

Videoaula 7.2 (Sobre a tarifação de energia elétrica). Para um pouco de teoria e um exemplo numérico de como se calcula a conta de energia elétrica, considerando uma rede elétrica CC, acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/EORbKMAdWgk>



7.6 Resumo do capítulo

Um breve sumário do que foi destaque no presente capítulo é apresentado na sequência:

- A energia elétrica pode ser transformada em outros tipos, como mecânica (via motores), térmica (via resistores), entre outros tipos;
- A energia é a grandeza que mensura a capacidade de um dispositivo realizar algum trabalho. A potência é a energia gasta ou consumida em certo período de tempo;

- A eficiência permite saber quanto da energia que é consumida por um dispositivo é utilizada para realização do trabalho para o qual ele foi projetado;
- A conta de energia depende do valor da tarifa e da quantidade de energia consumida pela instalação elétrica. Se equipamentos de alta eficiência são utilizados, então a energia desperdiçada é menor e, portanto, pode-se realizar as mesmas tarefas consumindo uma menor quantidade de energia da rede, o que diminui o valor da conta.

Problemas propostos

Problema 7.1. Qual a eficiência de um motor que possui uma potência mecânica de saída de 5 HP e uma potência de perdas de 800 W?

Problema 7.2. Qual é o valor diário de consumo de energia (em $\text{kW} \times \text{h}$) de um motor que possui potência de saída de 5 cv, eficiência de 80% e fica ligado 20 h/dia?

Problema 7.3. Um motor de corrente contínua opera consumindo da rede elétrica uma potência de 10 kW. Sabendo que ele está ligado pelos seus terminais a uma fonte de tensão de 220 V e possui uma eficiência de 75%, calcule: **Nota:** muitas indústrias possuem redes elétricas CC com tensões diversas, inclusive de 220 V.

- (a) A potência de perdas;
- (b) A intensidade da corrente drenada pelo motor;
- (c) A potência mecânica de saída do motor em kW;
- (d) Se a tarifa é R\$ 0,80/($\text{kW} \times \text{h}$), quanto se gasta por mês para manter este motor operando 20 h por dia?

Problema 7.4. Qual é o valor da tarifa de energia em R\$/($\text{kW} \times \text{h}$), se a conta mensal de energia de um setor que possui um motor de potência de saída de 6 cv, que fica ligado 15 h/dia, e possui rendimento de 80% é de R\$ 1.500,00?

Problema 7.5. Um motor é ligado pelos seus terminais em uma rede elétrica de 380 V. Este motor possui eficiência de 80% e potência de saída de 4 HP. Qual é o valor da corrente drenada pelo motor?

Problema 7.6. Qual é o valor da potência de perdas, em kW, de um motor que é alimentado pelos seus terminais com uma tensão de 380 V, consome uma corrente de 20 A e possui uma eficiência de 85%?

Parte II

Circuitos elétricos com tensões e correntes alternadas

Capítulo 8

Trigonometria e números complexos

8.1 Introdução

Antes que seja dado início às discussões sobre circuitos elétricos submetidos a tensões e correntes alternadas senoidais, é necessário que seja feita uma breve revisão de conceitos matemáticos que são imprescindíveis para o perfeito entendimento de tais tipos de circuitos. Estes conceitos são: círculo trigonométrico, função seno, função cosseno e números complexos.

8.2 Círculo trigonométrico

O *círculo trigonométrico* nada mais é do que um círculo com centro na origem de um sistema de eixos cartesianos (dois eixos perpendiculares entre si) e que possui raio unitário (raio com valor igual a um). Saliente-se que usa-se a palavra perpendicular para indicar que o ângulo é de 90° , assim dois eixos perpendiculares são eixos que estão desenhados a 90° um em relação ao outro. Na figura 8.1 é mostrada uma representação de um círculo trigonométrico com centro no sistema de eixos cartesianos xOy . O eixo horizontal é chamado de *eixo das abscissas* e o vertical é chamado de *eixo das ordenadas*.

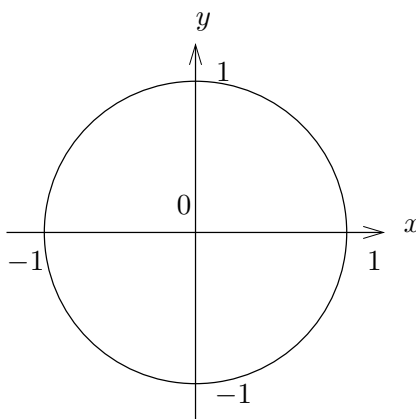
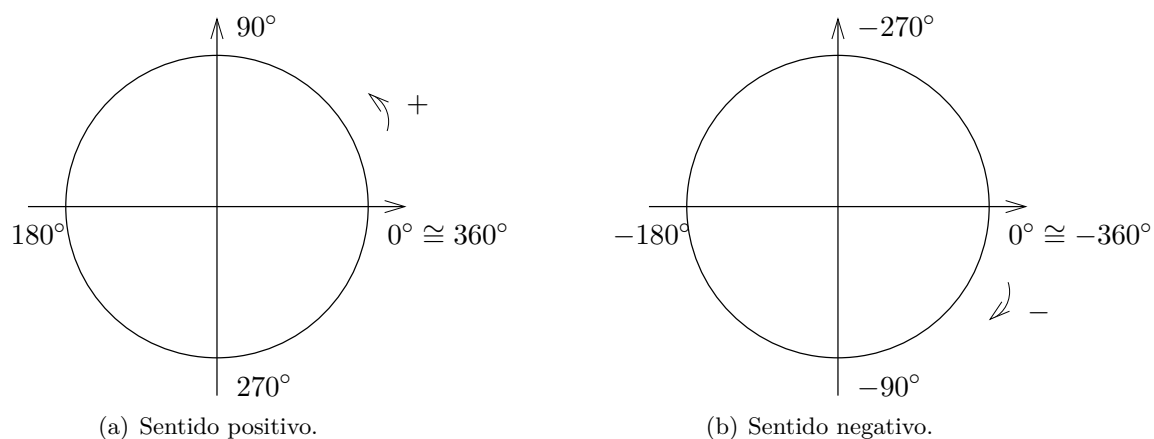
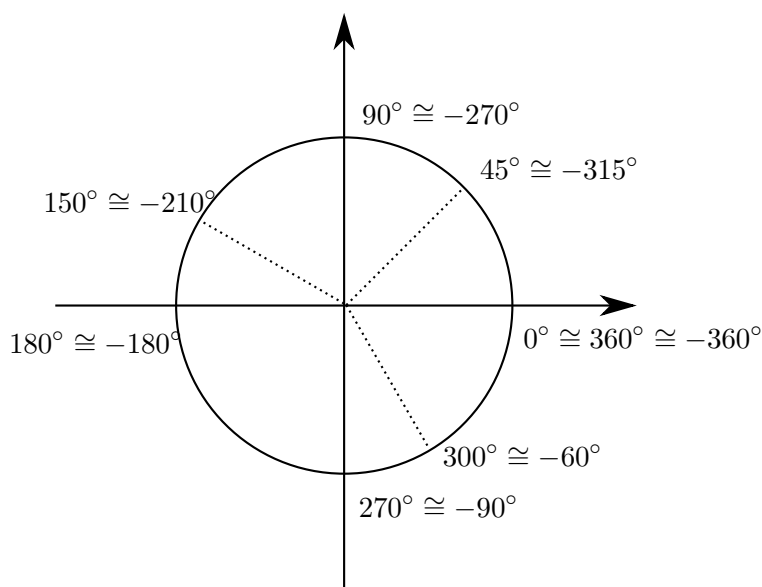


Figura 8.1: Círculo trigonométrico.

Se o círculo trigonométrico for dividido em 360 pedaços iguais (360 ângulos), cada pedaço (ângulo) terá um grau (1°). Sendo assim, o círculo trigonométrico terá 360 graus (360°) e valor positivo se o mesmo é percorrido no sentido anti-horário a partir da origem. Neste sentido todos os ângulos são positivos (ver figura 8.2(a)). Caso o círculo trigonométrico seja percorrido, a partir da sua origem, no sentido horário (sentido negativo) todos os ângulos serão negativos; tal convenção pode ser vista na figura 8.2(b).

**Figura 8.2: Sentidos angulares.**

Deve-se ter em mente que independentemente do sentido no qual o círculo trigonométrico seja percorrido, os ângulos coincidentes são os mesmos, como mostrado na figura 8.3. É importante que o estudante compreenda este conceito, pois não há padrão para representação de ângulos; enquanto alguns autores escrevem o ângulo 240° , outros escrevem este mesmo ângulo na forma -120° .

**Figura 8.3: Ângulos coincidentes.**

Alguns exemplos de ângulos coincidentes são dados a seguir:

$$\begin{aligned}
 45^\circ &\cong -315^\circ && (\text{Lê-se } 45^\circ \text{ é equivalente a } -315^\circ) \\
 90^\circ &\cong -270^\circ \\
 -60^\circ &\cong 300^\circ \\
 180^\circ &\cong -180^\circ \\
 -100^\circ &\cong 260^\circ \\
 0^\circ &\cong 360^\circ \cong -360^\circ \\
 175^\circ &\cong -185^\circ
 \end{aligned}$$

Além do grau, há outra unidade de representação dos ângulos em um círculo trigonométrico: o

radiano. Portanto, pode-se dizer que em uma volta completa no círculo trigonométrico percorre-se 360° ou então 2π radianos, que pode ser escrito simplificadamente como 2π rad. O estudante pode observar na figura 8.4 que vários ângulos são escritos em radianos. Deve-se lembrar que a constante π equivale, aproximadamente, ao valor 3,1416. Pode-se então verificar que, por exemplo, um ângulo de:

$$\begin{aligned} 180^\circ &\cong \pi \text{ rad}, \\ 90^\circ &\cong \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \\ 45^\circ &\cong \frac{\pi}{4} \text{ rad}, \\ -60^\circ &\cong -\frac{\pi}{3} \text{ rad}, \\ -120^\circ &\cong -\frac{2\pi}{3} \text{ rad}, \\ -225^\circ &\cong -\frac{5\pi}{4} \text{ rad}. \end{aligned}$$

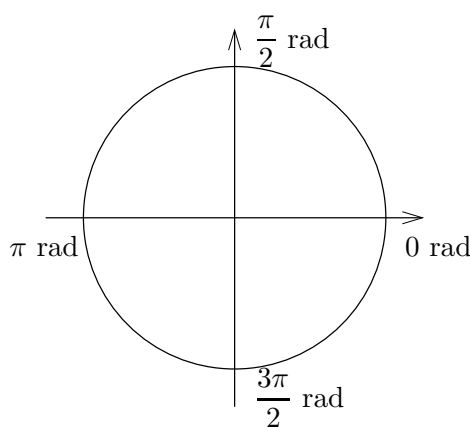


Figura 8.4: Ângulos em radianos.

Exemplo 8.1. Converta os ângulos a seguir que estão em radianos para graus e vice-versa.

- (a) 20°
- (b) 3 rad
- (c) -210°
- (d) $-0,5 \text{ rad}$

Solução:

O estudante deve lembrar que 180° equivale a $\pi \text{ rad}$ e isto é suficiente para converter de uma unidade para outra. Para converter de graus para radiano deve-se multiplicar o número dado por $\pi \text{ rad}/180^\circ$, enquanto que para transformar de radianos para graus deve-se multiplicar o número dado por $180^\circ/\pi \text{ rad}$. Outro dado relevante é que π vale aproximadamente 3,14.

- (a) A transformação de graus para radianos é feita a seguir:

$$20^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 20^\circ \times \frac{3,14 \text{ rad}}{180^\circ} \approx 0,349 \text{ rad}$$

- (b) A transformação de radianos para graus é feita a seguir:

$$3 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 3 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{3,14 \text{ rad}} \approx 171,97^\circ$$

(c) A transformação de graus para radianos é feita a seguir:

$$-210^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = -210^\circ \times \frac{3,14 \text{ rad}}{180^\circ} \approx -3,66 \text{ rad}$$

(d) A transformação de radianos para graus é feita a seguir:

$$-0,5 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = -0,5 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{3,14 \text{ rad}} \approx -28,66^\circ$$

□

Videoaula 8.1 (Conceitos básicos de trigonometria). Para mais detalhes sobre os conceitos básicos de trigonometria acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/lcqUdv_qsds



8.2.1 Seno e cosseno

Qualquer ângulo θ , esteja representado em graus ou em radianos, possui dois valores associados a ele: seu valor de *seno* e de *cosseno*. Os valores que os senos de todos os ângulos podem assumir estão no eixo das ordenadas (eixo vertical) e se encontram no intervalo entre -1 e 1 . Os valores dos cossenos estão nos eixos das abcissas (eixo horizontal) e também se encontram no intervalo entre -1 e 1 . Para um dado ângulo θ é comum representar a função seno, como $\text{sen}(\theta)$ e a função cosseno, como $\text{cos}(\theta)$.

Na figura 8.5 pode-se observar que a projeção do ponto que representa o ângulo no círculo trigonométrico sobre o eixo vertical representa o valor do seno do ângulo. A projeção deste mesmo ponto sobre o eixo horizontal determina o valor do cosseno do ângulo.

Para o seno e cosseno de um mesmo ângulo θ vale a relação:

$$\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1 \tag{8.1}$$

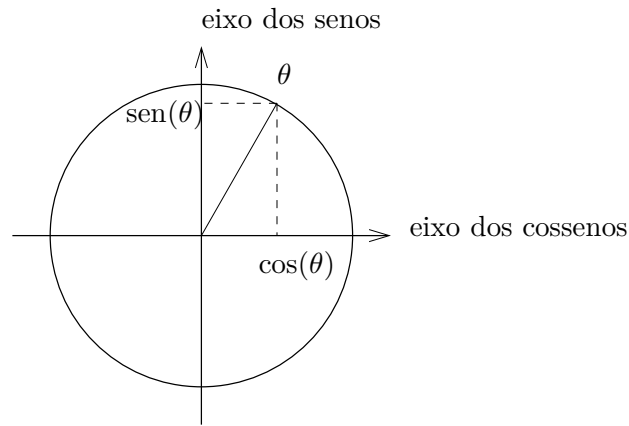


Figura 8.5: Seno e cosseno de um ângulo.

8.3 Relações trigonométricas em um triângulo retângulo

Um *triângulo retângulo* é aquele que possui um dos ângulos com valor de 90° , como mostrado na figura 8.6; esta possui identificados os ângulos de 90° ¹ e θ .

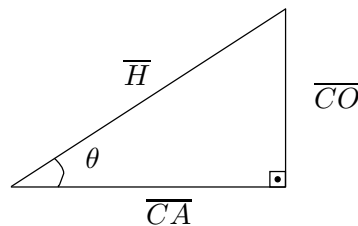


Figura 8.6: Ilustração de um triângulo retângulo.

Na citada figura pode-se identificar a hipotenusa (maior dos segmentos e marcado como $\overline{H}$) e os dois catetos. Um dos catetos está no lado oposto ao ângulo θ e é chamado de cateto oposto ($\overline{CO}$) e o outro está ao lado do ângulo θ e é chamado de cateto adjacente ($\overline{CA}$). A primeira relação que pode ser tirada de uma análise da ilustração do triângulo retângulo mostrado na figura 8.6 é o conhecido teorema de Pitágoras, cujo enunciado diz que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos e que escrita matematicamente se torna:

$$\overline{H}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CA}^2 \quad (8.2)$$

Outras relações trigonométricas são as de seno, cosseno e tangente do ângulo θ . O seno de θ é:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\overline{CO}}{\overline{H}} \quad (8.3)$$

O cosseno de θ é:

$$\text{cos}(\theta) = \frac{\overline{CA}}{\overline{H}} \quad (8.4)$$

A tangente de θ é:

$$\text{tan}(\theta) = \frac{\overline{CO}}{\overline{CA}} \quad (8.5)$$

¹O ângulo de 90° é costumeiramente representado por um quadrado com um ponto dentro. Veja a figura 8.6 novamente para identificar.

Com estas relações em mente pode-se encontrar o comprimento de qualquer um dos três segmentos e o valor de qualquer um dos ângulos de um triângulo retângulo. Deve-se salientar que, com o auxílio de uma calculadora científica, o estudante pode descobrir o valor dos ângulos a partir do valor do cosseno, do seno ou da tangente do mesmo. Por exemplo, o ângulo cujo cosseno é 0,3 é geralmente identificado como $\cos^{-1}(0,3)$ e o resultado é $72,54^\circ$. Uma outra forma de se escrever é $\arccos(0,3)$, que é lido como *arco cujo cosseno é 0,3*, podendo a palavra arco ser tratada neste caso como sinônimo de ângulo. Assim sendo, $\arccos(0,3) = 72,54^\circ$. O estudante deve não somente adquirir fluência no uso das relações descritas, como também na operação da calculadora.

Alguns ângulos são mais comuns e por este motivo são chamados de ângulos notáveis. Os seus valores de seno, cosseno e tangente são muito utilizados, então é muito comum que estes valores sejam tabelados para consultas: veja a tabela 8.1. Na referida tabela nota-se que para o ângulo de 90° não há um valor de tangente escrita; a tangente pode ser calculada como a divisão do seno pelo cosseno e para o referido ângulo este valor tende a infinito.

Tabela 8.1: Valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos notáveis.

Ângulo θ	$\text{sen}(\theta)$	$\text{cos}(\theta)$	$\text{tan}(\theta)$
0°	0	1	0
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	—

Exemplo 8.2. Determine o que é solicitado em cada um dos itens a seguir:

- (a) Qual é o valor do segmento $\overline{X}$ do triângulo mostrado na figura 8.7(a)?
- (b) Qual é o valor do $\text{sen}(\beta)$ para o triângulo mostrado na figura 8.7(b)?
- (c) Qual é o valor do $\text{cos}(\gamma)$ para o triângulo mostrado na figura 8.7(c)?

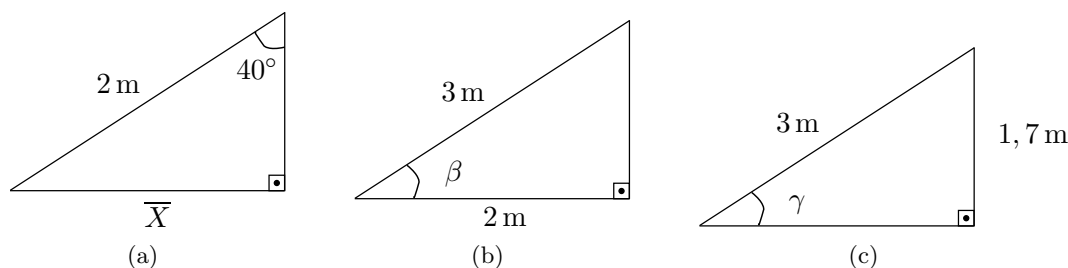


Figura 8.7: Ilustração de triângulos retângulos relativos ao exemplo 8.2.

Solução:

- (a) O segmento $\overline{X}$ é o cateto oposto ao ângulo de 40° . Portanto, pode-se utilizar a equação (8.3) e assim tem-se:

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(40^\circ) &= \frac{\overline{X}}{2} \\
 \overline{X} &= 2 \times \text{sen}(40^\circ) \\
 \overline{X} &= 2 \times 0,64 \\
 \overline{X} &= 1,28 \text{ m}
 \end{aligned}$$

- (b) Para calcular o seno do ângulo β é necessário saber os comprimentos do cateto oposto a β e da hipotenusa. Observando a figura 8.7(b) pode-se notar que a hipotenusa é de 3 m e o cateto adjacente é de 2 m. O cateto oposto pode ser determinado usando o teorema de Pitágoras (equação (8.2)), como feito na sequência:

$$\overline{H}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CA}^2$$

$$3^2 = \overline{CO}^2 + 2^2$$

$$\overline{CO}^2 = 3^2 - 2^2$$

$$\overline{CO}^2 = 9 - 4$$

$$\overline{CO} = \sqrt{5}$$

$$\overline{CO} = 2,24 \text{ m}$$

Agora pode-se calcular o seno de β utilizando a equação (8.3). Assim tem-se:

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\overline{CO}}{\overline{H}}$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{2,24}{3}$$

$$\text{sen}(\beta) = 0,75$$

- (c) Para calcular o cosseno de γ é preciso saber o comprimento do cateto adjacente ao ângulo γ e o comprimento da hipotenusa. Uma análise do triângulo da figura 8.7(c) mostra que o cateto oposto ao ângulo γ é de 1,7 m e a hipotenusa é de 3 m. O cateto adjacente pode ser encontrado usando o teorema de Pitágoras, como mostrado a seguir:

$$\overline{H}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CA}^2$$

$$3^2 = 1,7^2 + \overline{CA}^2$$

$$\overline{CA}^2 = 3^2 - 1,7^2$$

$$\overline{CA}^2 = 9 - 2,89$$

$$\overline{CA} = \sqrt{6,11}$$

$$\overline{CA} = 2,47 \text{ m}$$

Agora pode-se calcular o cosseno de γ utilizando a equação (8.4). Assim tem-se:

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{CA}}{\overline{H}}$$

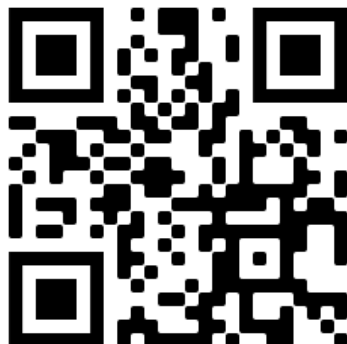
$$\cos(\gamma) = \frac{2,47}{3}$$

$$\cos(\gamma) = 0,82$$

□

Videoaula 8.2 (Sobre relações trigonométricas). Para mais detalhes sobre relações em um triângulo retângulo acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/jGubpSNfvpI>



8.4 Sinais alternados senoidais/cossenoidais

Nesta seção o assunto em destaque é o conceito de *sinais alternados senoidais e cossenoidais*. Deve-se salientar que, nesta seção, quando for utilizado o termo *sin*al é porque está sendo feita uma referência a uma *corrente elétrica* ou a uma *tensão* e, por isso, o sinal terá a unidade volt ou ampère. Outra coisa muito importante: é mais comum na engenharia elétrica que seja utilizada a representação cossenoidal, pois é a função que representa a projeção no eixo real e isto será importante para a definição de um fasor complexo: calma estudante, isto será apresentado no momento adequado no capítulo 10, por enquanto tenha paciência e aprenda a representação cossenoidal e senoidal de uma onda para estar apto a entender o fasor posteriormente. Outro comentário: uma função senoidal pode ser representada por uma cossenoide, bastando fazer um deslocamento de fase de 90° e o oposto é verdadeiro; por isto é comum que se diga que se estuda ou usa ondas senoidais e se faça a representação com um cosseno.

Os sinais alternados senoidais são aqueles que variam no tempo de acordo com uma função senoidal. Para um sinal alternado senoidal ou cossenoidal deve-se conhecer os seus parâmetros mais importantes. São eles:

- Valor de pico ou valor máximo do sinal: U_p , em volt ou ampère;
- Período do sinal: T , em segundos e que é abreviado por s;
- Frequência do sinal: f , sendo $f = 1/T$, a sua unidade é 1/s que é conhecido como hertz ou Hz;
- Frequência angular do sinal: ω , sendo $\omega = 2\pi f$ em rad/s;
- Ângulo de fase: θ em graus ou radianos.

Com o conhecimento destes parâmetros, pode-se definir uma função no domínio no tempo que represente o sinal alternado cossenoidal da forma:

$$u(t) = U_p \cos(\omega t) \text{ V} \quad (8.6)$$

O sinal alternado cossenoidal representado pela equação (8.6) pode ser visto na figura 8.8.

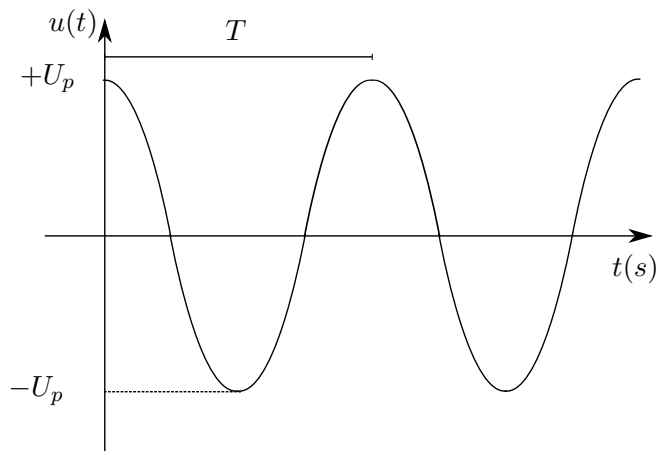


Figura 8.8: Sinal alternado cossenoidal.

A cossenoide exibida na figura 8.8 pode ser deslocada de tal forma que o valor máximo que ocorre no tempo $t = 0$ s ocorra depois (diz-se que a onda foi atrasada no tempo) ou antes (diz-se que a onda foi adiantada no tempo). Apesar da escala horizontal ser temporal, é muito comum que o atraso ou adiantamento da onda seja dado em graus, por exemplo θ . Se a onda for atrasada, então $\theta < 0^\circ$ e se for adiantada, então $\theta > 0^\circ$. A representação matemática da função cossenoidal com deslocamento é:

$$u(t) = U_p \cos(\omega t + \theta) \text{ V} \quad (8.7)$$

A representação gráfica da função cossenoidal da equação (8.7) considerando um atraso de θ (neste caso com valor negativo) é mostrada na figura 8.9, na qual são destacadas os parâmetros:

- U_p : valor de pico. Note que há o máximo $+U_p$ e o mínimo $-U_p$ da função. A função é alternada, pois tem parte positiva e parte negativa e oscila periodicamente;
- θ : é o ângulo de fase do sinal cossenoidal. A ideia de onda adiantada ou atrasada é importante para os cálculos de potência elétrica em corrente alternada, por isto dê atenção a esta seção;
- T : período do sinal. Representa o tempo necessário para se ter um ciclo completo do sinal, ou seja, é o tempo que o sinal demora para repetir a mesma forma de onda. Deve-se lembrar que a frequência f é o inverso do período. A frequência representa a quantidade de ciclos que ocorrem em 1 segundo.

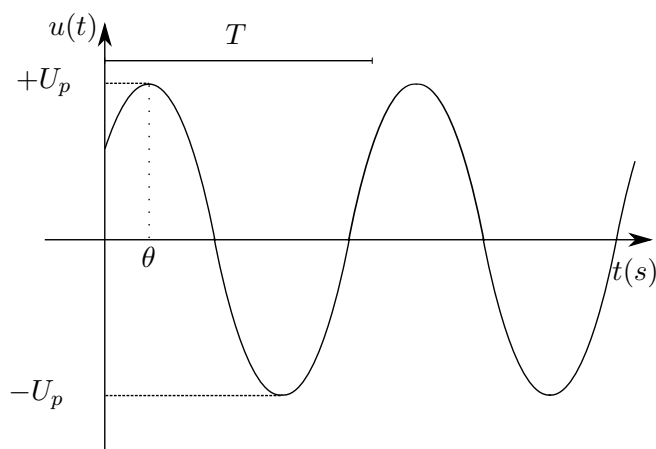


Figura 8.9: Sinal alternado cossenoidal.

O habitual é fazer a representação das grandezas a partir do tempo nulo, ou seja, a variável existir apenas para $t \geq 0$, pois o tempo zero é o marco que determina o interesse no estudo das grandezas. Saliente-se também que a abordagem feita para o sinal senoidal de tensão é a mesma que deve ser feita a sinais senoidais de corrente elétrica ou qualquer outra grandeza.

Exemplo 8.3. Represente graficamente a tensão cossenoidal abaixo:

$$u(t) = 150 \cos(377t - 35^\circ) \text{ V}$$

Solução:

Na equação apresentada, tem-se:

$$U_P = 150 \text{ V}$$

$$\omega = 377 \text{ rad/s}$$

Sendo $\omega = 2\pi f$, então:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{377}{2 \times 3,14}$$

$$f = 60 \text{ Hz}$$

Sendo $f = 60 \text{ Hz}$ e sendo $T = 1/f$, então $T = 0,01667 \text{ s}$.

Comparando a equação (8.7) e a equação dada no exemplo, tem-se que:

$$\theta = -35^\circ$$

Na figura 8.9 vê-se que um valor positivo de θ fez a representação da cossenoide ser deslocada para a esquerda, então um valor de θ negativo fará ela ser deslocada 35° para a direita, assim, pode-se ver a solução gráfica na figura 8.10.

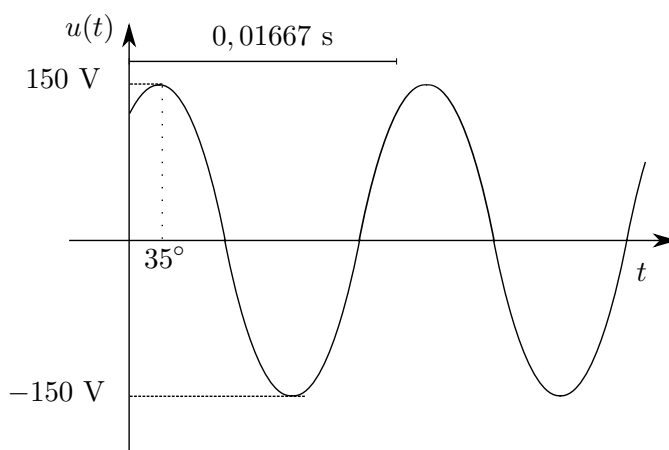


Figura 8.10: Solução gráfica relativa ao exemplo 8.3

□

Exemplo 8.4. Determine a equação para o sinal cossenoidal de corrente apresentado na figura 8.11.

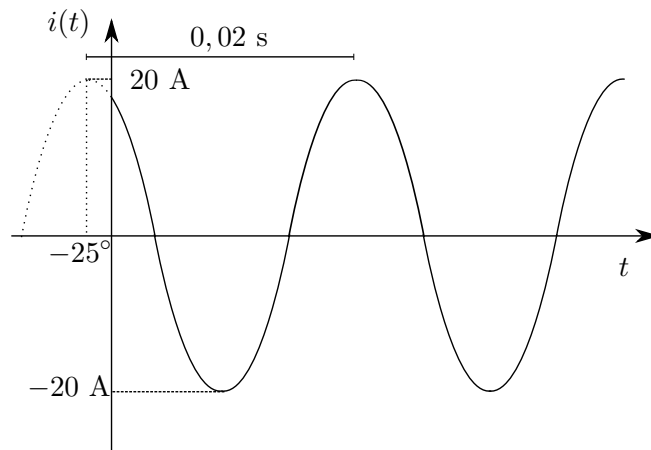


Figura 8.11: Corrente senoidal.

Solução:

Da análise gráfica o maior desafio é interpretar o ângulo de fase. Como a cossenoide está adiantada (seu pico ocorre antes de 0°), então o ângulo de fase é positivo e vale $+25^\circ$. Dito isto, organizando-se os parâmetros da função com base numa inspeção do gráfico são:

$$I_P = 20 \text{ A}$$

$$\theta = +25^\circ$$

$$T = 0,02 \text{ s}$$

Lembre-se que nas soluções que fará, você irá considerar o tempo zero como marco para contagem do fenômeno em estudo, quer seja a análise de uma tensão ou corrente. Por isto, o trecho de tempo negativo da função foi apresentado com uma linha pontilhada, deixando claro que foi desenhado apenas para que seja possível avaliar o ângulo de fase, mas que na verdade este sinal não existe, pois a contagem só começou no tempo zero.

Se $T = 0,02 \text{ s}$, então:

$$f = 1/T = 1/0,02 = 50 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2 \times \pi \times f$$

$$\omega = 2 \times \pi \times 50$$

$$\omega = 314,16 \text{ rad/s}$$

Logo:

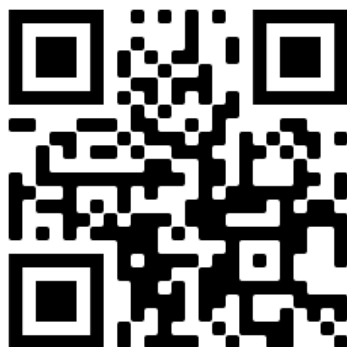
$$i(t) = 20 \cos(314,16t + 25^\circ) \text{ A}$$

No Brasil a frequência da onda de tensão do sistema elétrico é de 60 Hz, inclusive a tensão das tomadas da sua casa. Porém na Europa a rede elétrica tem frequência de tensão de 50 Hz, que foi o valor encontrado neste exemplo.

□

Videoaula 8.3 (Sinais alternados senoidais e cossenoidais). Para mais detalhes sobre os principais parâmetros que definem uma onda senoidal ou cossenoidal acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/bslTDjdtcfU>



8.5 Números complexos

A raiz quadrada de um número real positivo também é um número real positivo, por exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{4} &= 2 \\ \sqrt{9} &= 3 \\ \sqrt{2} &= 1,41\end{aligned}$$

Porém, a raiz quadrada de um número real negativo não é um número real pois, neste caso, esta operação não existe no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Assim, tendo em mente que o símbolo matemático $\nexists$ significa *não existe em*, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\sqrt{-4} &\nexists \mathbb{R} \\ \sqrt{-9} &\nexists \mathbb{R} \\ \sqrt{-2} &\nexists \mathbb{R}\end{aligned}$$

Entretanto, pode-se decompor esta operação matemática da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sqrt{-4} &= \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2 \times \sqrt{-1} \\ \sqrt{-9} &= \sqrt{9} \times \sqrt{-1} = 3 \times \sqrt{-1} \\ \sqrt{-16} &= \sqrt{16} \times \sqrt{-1} = 4 \times \sqrt{-1}\end{aligned}$$

Observando o que foi exposto, vê-se que sempre que se decompõe a raiz quadrada de um número real negativo obtém-se um número real positivo que multiplica o termo $\sqrt{-1}$. Sendo assim, atribui-se a este termo a denominação:

$$\sqrt{-1} = j \tag{8.8}$$

j recebe o nome de *unidade imaginária*. O estudante deve observar que nos livros de matemática usa-se a letra i para se representar a unidade imaginária, mas em estudos de eletricidade usa-se a letra j , pois i representa a corrente elétrica.

Qualquer número que possua a unidade imaginária j é um número complexo e pertence ao conjunto dos números complexos $\mathcal{C}$.

Um número complexo possui duas partes: uma real e uma imaginária. A parte imaginária é aquela que possui o termo j . De forma geral, um número complexo $\bar{z}$ pode ser representado por:

$$\bar{z} = a + jb \quad (8.9)$$

Na equação (8.9) o termo jb indica a multiplicação entre j e b e o símbolo de multiplicação só não é indicado para não deixar a expressão muito pesada, pois ficaria $\bar{z} = a + j \times b$. O estudante deve ficar atento ao fato de que neste livro os números complexos são identificados pela barra acima da letra, assim z pode indicar um número real, enquanto $\bar{z}$ representa um número complexo. Também será feito o uso do negrito para indicar um número complexo, então pode-se escrever $\mathbf{z} = a + jb$. Do número $\bar{z} = a + jb$ tem-se que a e b são números reais: a é a parte real e jb é a parte imaginária do número complexo. Quando se encontra nesta forma, o complexo é dito estar representado em sua forma *retangular* ou *cartesiana*.

Se um número complexo possuir apenas a parte real, $\bar{z} = a$, ele é chamado de *real puro*, neste caso $b = 0$. Se um número complexo possuir apenas a parte imaginária, $\bar{z} = jb$, ele é chamado de *imaginário puro*, neste caso $a = 0$.

De forma geral, tem-se:

$$\bar{z} = \Re + j\Im$$

Exemplos de números complexos na forma retangular:

$$\bar{x} = 5 + j2$$

$$\bar{y} = -j3$$

$$\bar{z} = 4$$

$$\bar{w} = -1 + j3$$

Um número complexo qualquer se encontra sempre no plano cartesiano formado por um par de eixos perpendiculares. O eixo horizontal ou real, é aquele no qual se encontra a projeção no eixo real $\Re$ (o número real a), e o eixo vertical ou imaginário, é aquele no qual se encontra a projeção no eixo imaginário $\Im$ (o número real b) que acompanha a unidade imaginária j . Na figura 8.12 tem-se a representação gráfica do número complexo $\bar{z} = a + jb$.

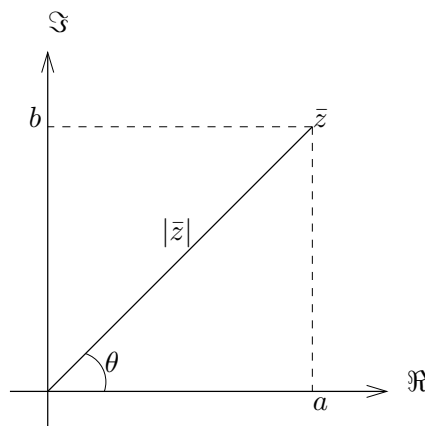


Figura 8.12: Representação gráfica de um número complexo.

Na figura 8.12 pode-se observar que um número complexo qualquer $\bar{z}$ possui um módulo $|\bar{z}|$ que é o seguimento de reta que vai desde a origem até o par ordenado (a, b) . Este módulo forma um ângulo θ com o semieixo real ($\Re$) positivo. Este ângulo é chamado de *argumento* do número complexo.

Conhecendo-se o módulo $|\bar{z}|$ de um número complexo e o seu argumento θ , pode-se representá-lo em sua forma *polar*:

$$\bar{z} = |\bar{z}| \angle \theta \quad (8.10)$$

Deve-se observar que a representação de um número complexo em sua forma polar é uma representação do valor do módulo do complexo $|\bar{z}|$ e de seu argumento θ e não de uma multiplicação entre $|\bar{z}|$ e θ .

Estando o número complexo representado em sua forma retangular, pode-se representá-lo muito facilmente em sua forma polar e vice-versa. Analisando-se a figura 8.12 encontra-se o triângulo retângulo cujos parâmetros são:

- Hipotenusa $|\bar{z}|$.
- Ângulo θ .
- Catetos adjacente a e oposto b .

Sendo assim, estando o número complexo em sua forma retangular $\bar{z} = a + jb$, e utilizando-se as relações do triângulo retângulo, tem-se:

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Então:

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} / \arctan(b/a) \quad (8.11)$$

Estando o complexo em sua forma polar $\bar{z} = |\bar{z}| \angle \theta$ e utilizando-se as relações do triângulo retângulo pode-se representá-lo em sua forma retangular:

$$a = |\bar{z}| \times \cos(\theta)$$

$$b = |\bar{z}| \times \sin(\theta)$$

Portanto:

$$\bar{z} = |\bar{z}| \times \cos(\theta) + j|\bar{z}| \times \sin(\theta) \quad (8.12)$$

Exemplo 8.5. Converta os números complexos da representação polar para retangular e vice-versa.

- (a) $-2 + j4$
- (b) $10 \angle 150^\circ$
- (c) $3 - j10$
- (d) $100 \angle -30^\circ$

Solução:

Veremos caso a caso:

- (a) O número está representado na forma retangular e, portanto, deve ser transformado na forma polar usando a equação 8.11:

$$\sqrt{(-2)^2 + (4)^2} / \arctan(4 / -2)$$

$$4,47 \angle 116,57^\circ$$

Qual foi o ângulo que você encontrou na sua calculadora? Faça a ilustração do número na representação retangular e veja que ele está no segundo quadrante do plano complexo e obrigatoriamente este ângulo é maior que 90° e menor que 180° .

- (b) O número está representado na forma polar e, portanto, deve ser transformado na forma retangular usando a equação 8.12:

$$10 \times \cos(150^\circ) + j10 \times \sin(150^\circ) \\ -8,66 + j5$$

- (c) Mais um a ser transformado na forma polar usando a equação 8.11:

$$\sqrt{(3)^2 + (-10)^2} \angle \arctan(-10/3) \\ 10,44 \angle -73,3^\circ$$

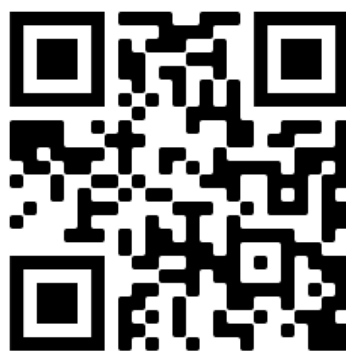
- (d) Mais um a ser transformado na forma polar usando a equação 8.12:

$$100 \times \cos(-30^\circ) + j100 \times \sin(-30^\circ) \\ 86,6 - j50$$

□

Videoaula 8.4 (Definição de números complexos). Para mais detalhes sobre os números complexos nas formas retangular e polar acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/hEOxKXVQ45w>



8.5.1 Operações entre números complexos

A seguir, as quatro operações matemáticas elementares envolvendo números complexos e o conceito de número complexo conjugado são apresentados.

Adição

A forma mais simples para se somar dois números complexos é quando ambos os números estão na forma retangular. Assim sendo, deve-se somar a parte real de um com a parte real do outro e a parte imaginária de um com a parte imaginária do outro.

Seja $\bar{z} = a + jb$ e $\bar{y} = c + jd$ dois números complexos, então:

$$\bar{z} + \bar{y} = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d) \quad (8.13)$$

Exemplo 8.6. A seguir, alguns exemplos de adição entre números complexos.

- (a) $(2 + j3) + (3 + j1) = (2 + 3) + j(3 + 1) = 5 + j4$
- (b) $(-1 + j2) + (3 - j4) = (-1 + 3) + j(2 - 4) = 2 - j2$
- (c) $(2) + (j3) = (2 + 0) + j(0 + 3) = 2 + j3$
- (d) $(-2 + j) + (5) = (-2 + 5) + j(1 + 0) = (3 + j1) = 3 + j$
- (e) $(-2 - j5) + (-j7) = (-2 + 0) + j(-5 - 7) = -2 - j12$

□

Subtração

Para subtrair um número complexo de outro deve-se subtrair a parte real de um da parte real do outro e a parte imaginária de um da parte imaginária de outro.

Seja $\bar{z} = a + jb$ e $\bar{y} = c + jd$ dois números complexos, então:

$$\bar{z} - \bar{y} = (a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d) \quad (8.14)$$

Exemplo 8.7. A seguir, alguns exemplos de subtração entre números complexos.

- (a) $(2 + j3) - (3 + j1) = (2 - 3) + j(3 - 1) = -1 + j2$
- (b) $(-1 + j2) - (3 - j4) = (-1 - 3) + j(2 + 4) = -4 + j6$
- (c) $(2) - (j3) = (2 - 0) + j(0 - 3) = 2 - j3$
- (d) $(-2 + j) - (5) = (-2 - 5) + j(1 - 0) = (-7 + j1) = -7 + j$
- (e) $(-2 - j5) - (-j7) = (-2 - 0) + j(-5 + 7) = -2 + j2$

□

Multiplicação

Para realizar a multiplicação de um número complexo por outro, os mesmos podem estar na forma retangular ou na forma polar.

Se os dois complexos estiverem na forma retangular, a multiplicação se processa aplicando-se a propriedade distributiva. *Você verá que a multiplicação na forma polar é mais simples e sem dúvida é a forma mais praticada. A depender do seu curso é interessante que vá direto para ela, que é apresentada nos próximos parágrafos.* Para a multiplicação entre números na representação retangular:

$$j \times j = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Sejam dois números complexos na forma retangular $\bar{z} = a + jb$ e $\bar{y} = c + jd$, então:

$$\bar{z} \times \bar{y} = (a + jb) \times (c + jd) = ac + ajd + jbc + jbjd = ac + jad + jbc - bd$$

Que pode ser reorganizado como:

$$\bar{z} \times \bar{y} = (ac - bd) + j(ad + bc) \quad (8.15)$$

Exemplo 8.8. A seguir, alguns exemplos de multiplicação entre números complexos na forma retangular com as operações sendo feitas utilizando a propriedade distributiva.

$$(a) (2 + j3) \times (3 + j1) = 2 \times 3 + 2 \times j1 + j3 \times 3 + j3 \times j1 = 3 + j11$$

$$(b) (-1 + j2) \times (3 - j4) = -1 \times 3 + (-1) \times (-j4) + j2 \times 3 + j2 \times (-j4) = 5 + j10$$

$$(c) (2) \times (j3) = j6$$

$$(d) (-2 + j) \times (5) = -2 \times 5 + j \times 5 = -10 + j5$$

$$(e) (-2 - j5) \times (-j7) = -2 \times (-j7) + (-j5) \times (-j7) = -35 + j14$$

□

Se os dois números complexos estiverem em suas formas polares $\bar{z} = |z|/\underline{\theta}$ e $\bar{y} = |y|/\underline{\alpha}$, então deve-se multiplicar os módulos e somar os ângulos.

Esta é a forma mais querida pelos estudantes para realizar as operações de multiplicação, então aprenda ela praticando.

$$\bar{z} \times \bar{y} = |x| \times |y|/\underline{(\theta + \alpha)} \quad (8.16)$$

Exemplo 8.9. A seguir, alguns exemplos de multiplicação entre números complexos na forma polar.

$$(a) 5/\underline{42^\circ} \times 2/\underline{10^\circ} = 10/\underline{52^\circ}$$

$$(b) 2/\underline{-28^\circ} \times 3/\underline{15^\circ} = 6/\underline{-13^\circ}$$

$$(c) 1/\underline{27^\circ} \times 4/\underline{-14^\circ} = 4/\underline{13^\circ}$$

$$(d) 2/\underline{4^\circ} \times 3/\underline{-20^\circ} = 6/\underline{-16^\circ}$$

$$(e) 4/\underline{-23^\circ} \times 5/\underline{-7^\circ} = 20/\underline{-30^\circ}$$

□

Se a operação de multiplicação entre números complexos na forma polar é mais simples que na forma retangular, então sugere-se que o estudante faça a transformação dos números da forma retangular para polar e depois execute a operação de multiplicação.

O conjugado complexo

Pode-se agora definir o *conjugado* de um número complexo $\bar{z}$. Este é também um número complexo, representado por $\bar{z}^*$, que quando multiplica o complexo $\bar{z}$, o resultado é o módulo de $\bar{z}$ elevado ao quadrado, ou seja:

$$\bar{z} \times \bar{z}^* = |z|^2 \quad (8.17)$$

Quando um número complexo está em sua forma retangular $\bar{z} = a + jb$ basta trocar o sinal da parte imaginária para encontrar o conjugado, ou seja:

$$\bar{z}^* = a - jb \quad (8.18)$$

Exemplo 8.10. A seguir, alguns exemplos de conjugados de números complexos na forma retangular.

$$(a) \bar{z} = -2 - j3 \Rightarrow \bar{z}^* = -2 + j3$$

$$(b) \bar{y} = j3 \Rightarrow \bar{y}^* = -j3$$

$$(c) \bar{x} = 2 \Rightarrow \bar{x}^* = 2$$

□

Quando um número complexo está em sua forma polar $\bar{z} = |\bar{z}| \angle \theta$, basta trocar o sinal do seu argumento para encontrar o conjugado, ou seja:

$$\bar{z}^* = |\bar{z}| \angle -\theta \quad (8.19)$$

Exemplo 8.11. A seguir, alguns exemplos de conjugados de números complexos na forma polar.

(a) $\bar{z} = 5 \angle 30^\circ \Rightarrow \bar{z}^* = 5 \angle -30^\circ$

(b) $\bar{y} = 2 \angle -150^\circ \Rightarrow \bar{y}^* = 2 \angle 150^\circ$

□

A relação mostrada na equação (8.17) permite simplificar alguns cálculos, como o da divisão que é mostrada na próxima seção. O estudante deve ainda saber que sendo $\bar{z} = a + jb$, então $\bar{z} \times \bar{z}^* = |\bar{z}|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$, que resulta em:

$$\bar{z} \times \bar{z}^* = a^2 + b^2 \quad (8.20)$$

Divisão

Para se dividir um número complexo por outro, os mesmos podem estar na forma retangular ou na forma polar.

Se os dois complexos $\bar{z}$ e $\bar{y}$ estiverem na forma retangular, a divisão se processa da seguinte forma:

$$\frac{\bar{z}}{\bar{y}} = \frac{\bar{z}}{\bar{y}} \times \frac{\bar{y}^*}{\bar{y}^*} \quad (8.21)$$

Ou seja, a fração que representa a divisão, $\bar{z}/\bar{y}$, tem o seu numerador, $\bar{z}$, e o seu denominador, $\bar{y}$, multiplicados pelo conjugado do seu denominador, $\bar{y}^*$.

Portanto, sendo $\bar{z} = a + jb$ e $\bar{y} = c + jd$ e lembrando-se ainda que um número complexo $\bar{y}$ multiplicado pelo seu conjugado $\bar{y}^*$ é igual a seu módulo elevado quadrado, $|\bar{y}|^2$, tem-se:

$$\frac{\bar{z}}{\bar{y}} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} \times \frac{(c - jd)}{(c - jd)} = \frac{(a + jb) \times (c - jd)}{|\bar{y}|^2}$$

Você verá posteriormente que a divisão é muito mais simples se ambos os números estiverem representados na forma polar.

Exemplo 8.12. A seguir, alguns exemplos de divisão entre dois números complexos na forma retangular.

(a) $\frac{(5 + j2)}{(2 - j3)}$

Solução:

Para realizar a divisão, quando os numerador e denominador estão representados em coordenadas retangulares, deve-se multiplicar ambos, numerador e o denominador, por $2 + j3$, que é o conjugado complexo do denominador $(2 - j3)$. Isto é feito a seguir:

$$\frac{(5 + j2)}{(2 - j3)} \times \frac{(2 + j3)}{(2 + j3)}$$

O estudante pode usar a relação dada na equação (8.20) e assim $(2 + j3) \times (2 - j3) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Seguindo os cálculos:

$$\frac{10 + j15 + j4 - 6}{13}$$

Realizando as somas no numerador:

$$\frac{4 + j19}{13}$$

O valor aproximado desta operação é:

$$0,31 + j1,46$$

o mesmo procedimento é feito na sequência, mas sem detalhamentos. O estudante deve detalhar por conta para treinar.

$$(b) \frac{(-4 + j2)}{(-1 - j3)}$$

Solução:

$$\frac{(-4 + j2)}{(-1 - j3)} = \frac{(-4 + j2)}{(-1 - j3)} \times \frac{(-1 + j3)}{(-1 + j3)} = -0,2 - j1,4$$

$$(c) \frac{(1 + j7)}{(j3)}$$

Solução:

$$\frac{(1 + j7)}{(j3)} = \frac{(1 + j7)}{(j3)} \times \frac{(-j3)}{(-j3)} = 2,33 - j0,33$$

$$(d) \frac{(-1 - j2)}{(4)}$$

Solução:

$$\frac{(-1 - j2)}{(4)} = \frac{(-1 - j2)}{(4)} \times \frac{(4)}{(4)} = -0,25 - j0,5$$

Veja que na divisão por um número real, é uma perda de tempo fazer o uso do conjugado, pois pode-se de forma imediata dividir o número complexo por 4 desde o início.

$$(e) \frac{(3)}{(2 - j1)}$$

Solução:

$$\frac{(3)}{(2 - j1)} = \frac{(3)}{(2 - j1)} \times \frac{(2 + j1)}{(2 + j1)} = 1,2 + j0,6$$

□

Se os dois números complexos estiverem em suas formas polares $\bar{z} = |z|\underline{\theta}$ e $\bar{y} = |y|\underline{\alpha}$, então deve-se dividir o módulo do numerador pelo do denominador e subtrair o argumento do numerador pelo do denominador, como é mostrado a seguir:

$$\frac{\bar{z}}{\bar{y}} = \frac{|z|\underline{\theta}}{|y|\underline{\alpha}} = \frac{|z|}{|y|}\underline{\theta - \alpha} \quad (8.22)$$

A divisão entre números complexos é tão mais simples na forma polar, que é a preferida pelos estudantes. Veja no exemplo que segue.

Exemplo 8.13. A seguir, alguns exemplos de divisão entre dois números complexos na forma polar.

$$(a) \frac{8\underline{10^\circ}}{2\underline{3^\circ}} = \frac{8}{2}\underline{10^\circ - 3^\circ} = 4\underline{7^\circ}$$

$$(b) \frac{3\underline{45^\circ}}{5\underline{-27^\circ}} = \frac{3}{5}\underline{45^\circ - (-27^\circ)} = 0,6\underline{72^\circ}$$

$$(c) \frac{10 \angle -60^\circ}{4 \angle -15^\circ} = \frac{10}{4} \angle -60^\circ - (-15^\circ) = 2,5 \angle -45^\circ$$

$$(d) \frac{2 \angle 30^\circ}{5 \angle 30^\circ} = \frac{2}{5} \angle 30^\circ - 30^\circ = 0,4 \angle 0^\circ = 0,4$$

$$(e) \frac{15 \angle -50^\circ}{3 \angle -50^\circ} = \frac{15}{3} \angle -50^\circ - (-50^\circ) = 5 \angle 0^\circ = 5$$

□

Se a divisão entre números complexos representados na forma polar é mais simples, então é sugerido que sempre que possível o estudante transforme os números para representação polar e depois efetue a divisão.

Videoaula 8.5 (Operações com números complexos). Para mais detalhes, com exemplos numéricos, sobre como realizar as operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e conjugação com números complexos nas formas retangular e polar acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/eFYTZGhm9kk>



8.6 Resumo do capítulo

Os capítulos subsequentes tratarão de circuitos cujas tensões e correntes possuem forma de onda senoidal/cossenoidal. Para perfeito entendimento das ferramentas criadas para solucionar problemas para estes tipos de circuitos, o estudante deve dominar os conceitos e operações baseadas em trigonometria e números complexos. Estes foram os temas do presente capítulo e uma breve revisão é feita a seguir:

- As unidades mais usadas para medir ângulos são o grau e o radiano;
- O triângulo que possui um ângulo reto (de valor 90°) é chamado de triângulo retângulo. Todos eles possuem uma hipotenusa (parte oposta ao ângulo reto) e dois catetos. Se é escolhido outro ângulo α qualquer que não seja o reto para se fazer a análise, então tem-se o cateto oposto e o adjacente a α ;
- O seno de um ângulo é igual ao quociente entre o cateto oposto e a hipotenusa, enquanto que o cosseno de um ângulo é igual ao quociente do cateto adjacente pela hipotenusa. A tangente de um ângulo é igual ao cateto oposto pelo cateto adjacente;

- O número $\sqrt{-1}$ é representado pela letra j e é chamado de unidade imaginária. Nos livros de matemática a unidade imaginária é representada pela letra i , porém esta letra não é adotada nos textos de eletricidade para não haver confusão com a corrente elétrica;
- Um número complexo pode ser representado na forma polar (módulo e ângulo) ou retangular (partes real e imaginária);
- Números complexos são empregados para representar funções cossenoidais e senoidais, por isso serão úteis nos estudos futuros sobre eletricidade com tensões e correntes elétricas senoidais/cossenoidais.

Problemas propostos

Problema 8.1. Localize cada ângulo abaixo no círculo trigonométrico e, com o auxílio de uma calculadora científica, calcule para cada um deles os valores de sen e cos. Para os ângulos notáveis é conveniente que o valor seja memorizado com base na tabela 8.1 em vez de obtido via calculadora.

- (a) 45°
- (b) $-\frac{\pi}{3}$ rad
- (c) -20°
- (d) $\frac{\pi}{7}$ rad
- (e) 115°
- (f) $-\frac{\pi}{4}$ rad
- (g) -330°
- (h) $\frac{5\pi}{8}$ rad
- (i) -45°
- (j) $-0,9$ rad
- (k) 150°
- (l) $2,5$ rad
- (m) -315°
- (n) $\frac{7\pi}{4}$ rad
- (o) 120°
- (p) $-\frac{5\pi}{3}$ rad
- (q) 300°
- (r) $\frac{2\pi}{6}$ rad
- (s) 210°
- (t) $\frac{4\pi}{3}$ rad

Problema 8.2. Para cada triângulo retângulo da figura 8.13, determine o que se pede:

- (a) Para o triângulo da figura 8.13(a) encontre os valores de x e θ ;
- (b) Para o triângulo da figura 8.13(b) encontre os valores de h , $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e α .

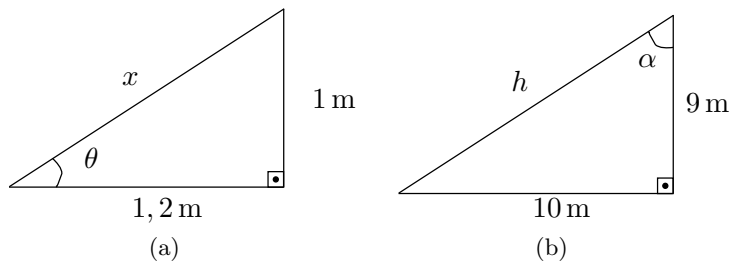


Figura 8.13: Ilustração de triângulos retângulos relativos ao problema 8.2.

Problema 8.3. Com os números complexos: $\bar{a} = 10\angle 60^\circ$, $\bar{b} = 2\angle \pi/6$, $\bar{c} = -2 + j3$ e $\bar{d} = 5 + j4$, realize as operações indicadas e dê a resposta final em coordenada retangulares.

- (a) $\bar{a} + \bar{d}$
- (b) $\bar{c} - \bar{b}$
- (c) $\bar{a} \times \bar{b}^*$
- (d) $\frac{\bar{c}}{\bar{d}}$
- (e) $\frac{\bar{a}^* - \bar{b}}{\bar{a} + \bar{c}}$
- (f) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
- (g) $\bar{c}^* \times d$
- (h) $\frac{\bar{b} \times \bar{d}^*}{\bar{c}^2}$
- (i) $\bar{a}^* \times \bar{b}^*$
- (j) $\bar{a} + \bar{b}$

Problema 8.4. Represente graficamente cada um dos sinais alternados senoidais de tensão e corrente apresentados abaixo.

- (a) $i(t) = 3 \sin(314,16t - 45^\circ) \text{ A}$
- (b) $u(t) = 127 \cos(377t) \text{ V}$
- (c) $i(t) = 42,6 \cos(377t + \frac{\pi}{3}) \text{ A}$
- (d) $u(t) = 150 \cos(314,16t - \frac{\pi}{2}) \text{ V}$

Problema 8.5. Determine as equações para os sinais senoidais/cossenoidais de corrente apresentados na figura 8.14.

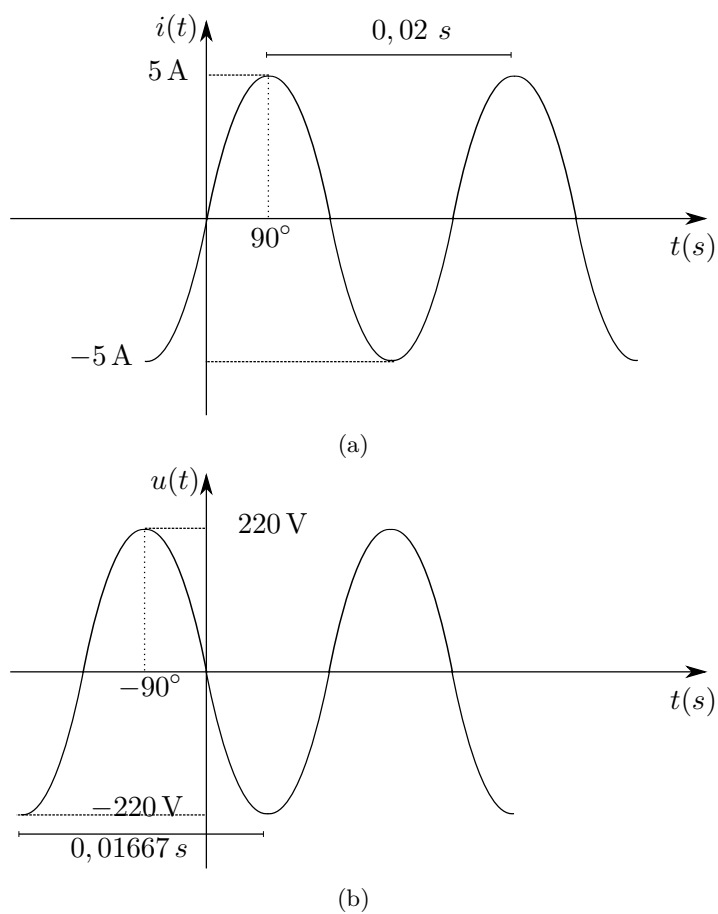


Figura 8.14: Grandezas senoidais/cossenoidais.

Capítulo 9

Circuitos indutivos e capacitivos

9.1 Introdução

Até agora foram abordados neste livro apenas circuitos elétricos puramente resistivos. Entretanto, a modelagem de vários equipamentos ou instalações elétricas só correspondem à realidade quando são considerados os efeitos indutivo e capacitivo. Estes efeitos aparecem somente quando as tensões e correntes elétricas variam no tempo, como, por exemplo, no caso delas possuírem formas de onda senoidais. Portanto, não havia sentido estudar estes efeitos nos capítulos anteriores, que trataram de circuitos elétricos cujas tensões e correntes eram exclusivamente contínuas. Neste capítulo será dada uma introdução à modelagem dos efeitos indutivo e capacitivo, enfatizando os elementos de circuito chamados de indutor e de capacitor.

9.2 Circuito indutivo

Na presente seção é mostrado apenas a teoria básica para que o estudante entenda como modelar o efeito indutivo num circuito utilizando o elemento *indutância*. Para melhor compreensão sobre a indutância, são apresentados também alguns conceitos sobre eletromagnetismo.

9.2.1 Indutância e indutor

Quando um pedaço de ferro é aproximado de um ímã nota-se que há uma força de atração entre o ímã e o pedaço de ferro. Isto ocorre devido ao campo magnético ao redor do ímã, sendo que a força de atração vai ficando mais intensa quando a distância entre eles diminui. Outra característica dos ímãs é serem bipolares, ou seja, eles possuem duas polaridades, que são chamadas de polo norte e de polo sul. Se dois polos iguais estão próximos a força nos dois ímãs é de repulsão e se dois polos distintos estão próximos a força é de atração. Estas forças de repulsão e de atração descritas são utilizadas em muitos dispositivos eletromagnéticos, como, por exemplo, motores elétricos, disjuntores, contadores etc.

É usual que para operar adequadamente um dispositivo, tenha-se a intensidade do seu campo magnético alterado. Isto pode ser feito com um ímã ao aproximá-lo (aumentando o campo magnético) ou afastá-lo (diminuindo o campo magnético). Uma maneira mais adequada de se alterar a intensidade do campo magnético é utilizando um *eletroímã*, que é um dispositivo cuja construção é mostrada na figura 9.1, na qual pode ser observado que há uma *bobina* (fios enrolados) e uma parte maciça cuja forma é cilíndrica. Cada vez que o fio é enrolado de maneira que forme uma volta completa diz-se que foi feita uma *espira* e, portanto, uma bobina é formada por várias espiras. Quando há corrente circulando em um fio, surge nas proximidades um campo magnético que ficará mais forte conforme a intensidade da corrente aumenta. Outra forma de intensificar o campo magnético é aumentar a quantidade de espiras desta bobina pela qual a corrente circula.

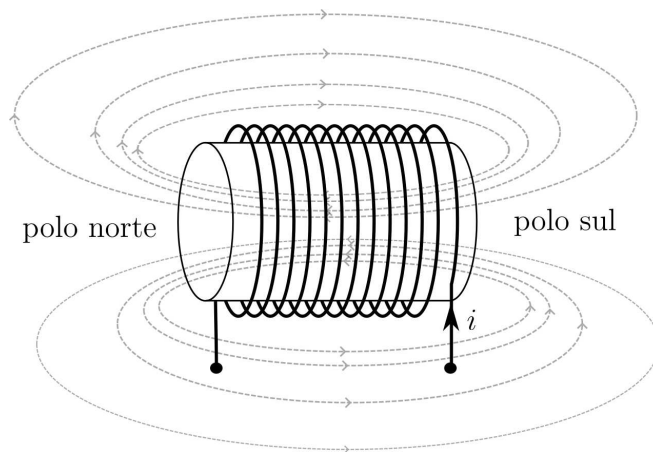


Figura 9.1: Eletroímã e as indicações dos seus polos e linhas de força magnéticas. É indicado como norte o polo no qual as linhas de força magnéticas saem do eletroímã e sul é o polo no qual as linhas entram no eletroímã.

Pode-se avaliar os efeitos do campo magnético identificando-se a quantidade de linhas de força magnéticas, pois nas regiões em que elas estão mais próximas uma das outras é mais significativo o efeito do magnetismo, mas estas linhas não são visíveis a olho nu. Na figura 9.1 nota-se que nos extremos e no interior do eletroímã a densidade de linhas de força é alta (linhas próximas umas das outras) e quanto mais afasta-se do eletroímã, menor é a densidade das linhas de força (linhas mais afastadas umas das outras). O mesmo ocorre em um ímã, quanto mais próximo dele, maior será a quantidade de linhas de força magnéticas. A grandeza que mensura a quantidade de linhas de força magnéticas é o fluxo magnético ϕ e a sua unidade é o weber, cuja representação mais compacta é Wb^1 . Quanto maior o fluxo magnético, maior é a quantidade de linhas de força magnéticas e mais intenso os efeitos magnéticos na região.

As linhas de força magnéticas atravessam mais facilmente uns materiais do que outros. Assim como materiais condutores facilitam a passagem da corrente e os isolantes dificultam a passagem da mesma, há os materiais que facilitam o confinamento destas linhas de força magnéticas. Estes são chamados de materiais magnéticos, sendo o do tipo ferromagnético o mais comum na construção de equipamentos elétricos. Os materiais que dificultam o confinamento das linhas de força magnéticas serão chamados no presente livro de não magnéticos. O ferro e o aço são bons materiais ferromagnéticos enquanto que o cobre e o alumínio não são materiais magnéticos, ainda que estes dois últimos sejam excelentes condutores de corrente. O ar, a borracha, a madeira, entre outros, são não magnéticos. O eletroímã mostrado na figura 9.1 possui a parte maciça cilíndrica feita de material magnético e esta parte maciça é chamada de *núcleo magnético*.

A medida de quanto um dispositivo é adequado ou não para fins de confinamento do campo magnético pode ser avaliada por uma grandeza chamada *relutância magnética*, ou simplesmente *relutância*, que é representada pelo símbolo $\mathcal{R}$. Pode-se fazer uma analogia entre resistência e relutância: a resistência baixa indica que o meio (um resistor, por exemplo) facilita a passagem de corrente enquanto que uma relutância baixa indica que o meio (por exemplo, um núcleo de metal) facilita o confinamento de linhas de força magnéticas. A relutância é dada por:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A} \quad (9.1)$$

Sendo:

- l o comprimento do meio que se está avaliando a relutância;

¹Respeite as maiúsculas e minúsculas. Não é wb, WB ou wB: é Wb!

- A a área que é atravessada pelas linhas de campo magnéticas;
- μ a permeabilidade magnética, que é um valor característico dos materiais. Quanto maior o seu valor menor será a relutância, portanto, em dispositivos magnéticos deseja-se materiais com alto valor de permeabilidade da mesma forma que num condutor elétrico utiliza-se materiais de alto valor de condutividade.

Pode-se dizer que em dois dispositivos distintos, um com relutância elevada e outro com relutância baixa, é mais fácil impor um certo valor de fluxo magnético naquele cuja relutância possui menor valor. No eletroímã ilustrado na figura 9.1, a área A é circular e o comprimento l é comprimento total do cilindro.

Toda a teoria descrita até agora nesta seção foi para que o estudante adquirisse conhecimento suficiente para entender o princípio de funcionamento do *indutor*, que é o principal objeto de estudo desta seção. O indutor é basicamente um fio enrolado (a bobina) em um núcleo ferromagnético como é mostrado na figura 9.2, em que pode-se verificar que o núcleo é fechado, pois assim todas as linhas de força magnéticas ficam confinadas dentro do núcleo, o que não era o caso do dispositivo mostrado na figura 9.1. Fotos de indutores reais podem ser vistas na figura 9.3 e neles as bobinas e núcleos podem ser visíveis, para redução de custos ou para melhor dissipação do calor, ou eles podem ser encapsulados, seja para proteção ou para que obedeçam algum padrão de construção de componentes elétricos. Idealmente, se o material ferromagnético é perfeito, nenhuma das linhas de força magnéticas sai do núcleo.

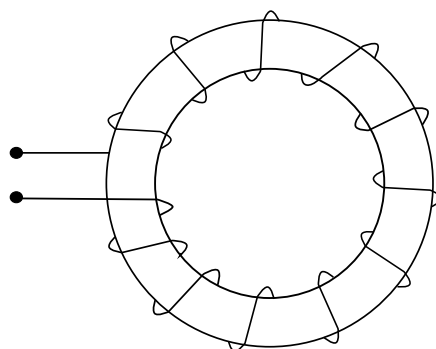


Figura 9.2: Ilustração de um indutor.

Só haverá campo magnético dentro do núcleo do indutor enquanto houver corrente circulando nos fios do eletroímã. As linhas de força se concentrarão no interior do núcleo e passando por dentro da bobina. Para compreender exatamente o motivo pelo qual o indutor é empregado, é necessário que o estudante entenda os efeitos de um campo magnético no interior do núcleo do indutor. Como descrito no decorrer desta seção, a corrente pode gerar campo magnético, porém, será que o campo magnético pode gerar algum efeito elétrico? A resposta é sim, no entanto, há algumas peculiaridade sobre isto que são descritas a partir de agora.

A lei de Faraday, nome dado a lei em homenagem ao seu descobridor, diz que se o núcleo de um indutor é atravessado por campo magnético de valor *variável* isto fará com que surja uma tensão na sua bobina. Note que foi dado destaque à palavra variável na sentença anterior, pois só haverá tensão nos terminais da bobina do indutor se houver variação no valor do campo magnético. Algumas questões precisam ser destacadas:

- A d.d.p. medida nos terminais da bobina do indutor devido ao efeito do campo magnético é chamada de *tensão induzida*;
- Só há tensão induzida se o campo magnético que flui por dentro da bobina possuir valor variável. Dessa maneira, deve circular uma corrente de intensidade variável (por exemplo, senoidal) na



(a) Indutor com núcleo toroidal.



(b) Indutor para potências em torno de 300 W.



(c) Indutores empregados em placas eletrônicas.

Figura 9.3: Fotos de indutores.

bobina do indutor, que fará surgir um fluxo magnético variável dentro do núcleo e como o fluxo magnético varia dentro da bobina, então haverá uma tensão induzida na bobina;

- Se os terminais do fio em que foi induzida a tensão não estiverem conectados a nenhum dispositivo, então não haverá nenhuma corrente circulando. Porém, se os terminais do fio em que há tensão induzida estiverem conectados a uma carga haverá um caminho fechado para circulação de corrente²;
- No caso do indutor, o campo magnético é gerado pela corrente da bobina e, portanto, o indutor tem de estar sempre ligado a um circuito que possua alguma fonte de tensão ou de corrente. A corrente que circula na bobina deve ser de valor variável para que surja nos terminais do indutor uma tensão induzida. Se uma corrente contínua circula nos terminais do indutor, não haverá tensão induzida. Percebe-se, então, que os indutores não foram estudados nos capítulos anteriores que tratavam de circuitos elétricos com tensões e correntes elétricas contínuas pelo fato de que nesta situação eles não fazem diferença. Já em circuitos elétricos cujas tensões e correntes elétricas variam no tempo (por exemplo, na forma de onda senoidal) é relevante a avaliação dos efeitos indutivos.

A lei de Faraday, que trata da tensão induzida, pode ser escrita matematicamente como:

$$e = N \frac{d\phi}{dt} \approx N \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (9.2)$$

²Alguns livros chamam esta corrente de *corrente induzida*, pois se dá devido a tensão induzida pelo campo magnético variável. A rigor, a tensão é sempre induzida no fenômeno em destaque, porém a corrente só existe se houver caminho fechado no circuito. Portanto, não é adequado dizer simplesmente que campo magnético variável gera corrente induzida, pois isto nem sempre será verdadeiro.

Sendo que:

- e denota a tensão induzida nos terminais da bobina;
- N é o número de espiras da bobina;
- ϕ o fluxo magnético, que é uma medida da quantidade de linhas de força magnéticas que atravessa o interior da bobina;
- t é o tempo;
- $d\phi$ e dt são respectivamente os diferenciais de fluxo magnético e de tempo. Se a taxa de variação do fluxo no tempo pode ser considerada constante num tempo, então pode-se realizar a aproximação retirando o diferencial e fazendo a variação com base nos valores inicial e final, como é descrito a seguir;
- Δ representa a variação de uma grandeza. Assim $\Delta\phi$ é a variação do valor do fluxo magnético de um valor inicial ϕ_i até um valor final ϕ_f : matematicamente escreve-se $\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$. O mesmo se dá em relação ao tempo. Δt é o tempo decorrido desde a mudança do fluxo magnético do valor inicial até o valor final, ou seja, $\Delta t = t_f - t_i$.

Nota-se da equação (9.2) que a tensão induzida em um indutor dependerá do fluxo magnético que atravessa o núcleo ferromagnético e este valor depende da relutância do núcleo (para o mesmo valor de corrente circulando no fio da bobina, quanto maior for a relutância, menor será o fluxo magnético e vice-versa). Além do mais, o valor da tensão induzida depende da quantidade de espiras da bobina do indutor. O propósito deste livro é realizar a modelagem empregando circuitos elétricos e isto não está sendo feito quando grandezas magnéticas são utilizadas. Por isso é introduzido agora o conceito de *indutância*, que é o elemento de circuito que permite obter a relação entre a tensão e a corrente em um indutor, sem recorrer ao uso de grandezas magnéticas.

A indutância é representada pela letra L e sua unidade é o henry ou simplesmente H. É necessário que o estudante perceba que indutor é um dispositivo físico (que é construído com um núcleo e bobina) e indutância é uma propriedade física. O estudante deve relembrar a diferença entre resistor (dispositivo) e resistência (propriedade de um dispositivo em se opor à passagem de corrente). Pode-se dizer que um indutor possui um valor de indutância assim como diz-se que um resistor possui um valor de resistência. É necessário salientar que vários dispositivos que operam com corrente variável são modelados por uma indutância, ainda que não sejam indutores. Por exemplo, os fios de linhas de transmissão de energia possuem indutâncias, pois são percorridos por corrente senoidal e geram campo magnético também senoidal, que induz uma tensão nos fios ao lado. A indutância também está presente na modelagem de outros dispositivos eletromagnéticos como motor e gerador elétricos. No caso de um indutor (núcleo e bobina), a indutância é dada por:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \quad (9.3)$$

A equação (9.3) evidencia que a indutância de um indutor depende da quantidade de espiras que formam a bobina e da relutância (esta depende das dimensões e do material do núcleo). Como é mostrado no exemplo 9.1, pode-se realizar medições da tensão induzida e da corrente e se obter o valor de L , sem precisar saber os valores de N e $\mathcal{R}$.

Voltando ao uso da indutância para modelar a relação entre a tensão induzida e a corrente, pode-se dizer que um indutor L ao ter sua bobina percorrida por uma corrente i de valor variável, gerará um fluxo magnético variável e que induzirá nos fios da própria bobina do indutor uma tensão e , cujo valor é dado por:

$$e = L \frac{di}{dt} \approx L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad (9.4)$$

A equação (9.4) está como desejado, pois possui apenas os valores de tensão, corrente e um elemento de circuito, enquanto que a equação (9.2) não é conveniente para estudos de circuitos elétricos, já que é necessário saber o valor da grandeza fluxo magnético, que depende da quantidade de espiras, do material de que é feito o núcleo e das dimensões deste mesmo núcleo.

Quanto à aplicação de indutores, o estudante deve ter conhecimento de que ele é usado para limitar o valor da corrente em caso de curto-circuito ou são empregados na confecção de placas eletrônicas que filtram sinais³, entre outras aplicações.

Exemplo 9.1. Um técnico possui um indutor e deseja saber o valor da sua indutância. Por isso fez o seguinte teste: elevou o valor da corrente que flui no indutor de 0 A para 5 A em um intervalo de tempo de $40 \mu\text{s}$ e mediu o valor da tensão induzida durante o período em que a corrente era elevada de valor, no qual encontrou 400 V. Qual é o valor da indutância deste indutor?

Solução:

Basta empregar diretamente a equação (9.4). A variação de corrente é $\Delta i = i_f - i_i = 5 - 0 = 5 \text{ A}$ que é variada em um intervalo de tempo de $\Delta t = 40 \mu\text{s} = 40 \times 10^{-6} \text{ s}$ e a tensão induzida nos terminais do indutor foi de $e = 400 \text{ V}$. A seguir os cálculos são feitos:

$$\begin{aligned} e &= L \frac{\Delta i}{\Delta t} \\ L &= e \frac{\Delta t}{\Delta i} \\ L &= 400 \left(\frac{40 \times 10^{-6}}{5} \right) \\ L &= 4 \times 10^2 \left(\frac{40 \times 10^{-6}}{5} \right) \\ L &= \frac{160 \times 10^{-4}}{5} \\ L &= 32 \times 10^{-4} \\ L &= 3,2 \times 10^{-3} \text{ H} \\ L &= 3,2 \text{ mH} \end{aligned}$$

Considerou-se que a corrente aumentou linearmente e, neste intervalo que ela estava aumentando, a tensão induzida estava constante no valor de 400 V.

□

9.2.2 Associação de indutâncias

As indutâncias são associadas para se encontrar uma única, chamada de *indutância equivalente* de maneira similar à associação de resistências.

Associação de indutâncias em série

Na figura 9.4(a) é mostrado um circuito com n indutâncias associadas em série e podem ser substituídas pela indutância equivalente L_{eq} se o valor desta é:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n \quad (9.5)$$

³No contexto de sinais elétricos, filtrar é impedir que o sinal de tensão ou de corrente contenha uma faixa ou um valor específico de frequência. Assim como um filtro de água impede a passagem de impurezas, um filtro, no contexto de eletricidade, impede a passagem de um sinal com uma certas frequências.

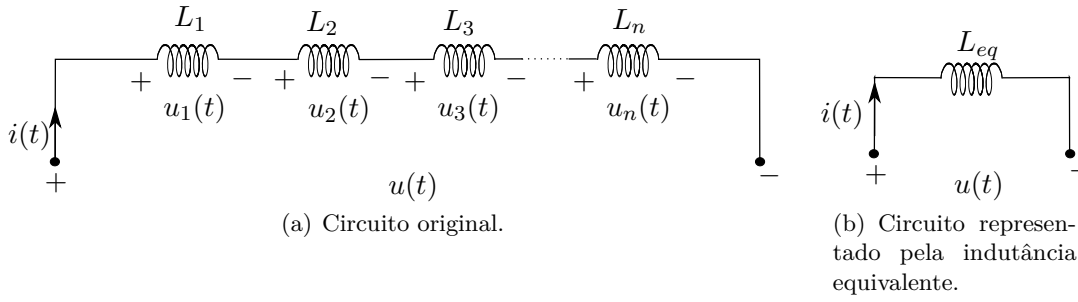


Figura 9.4: Circuitos elétricos para análise do conceito de indutância equivalente.

Deve-se ter em mente que se todas as indutâncias do circuito original forem trocadas por uma única, a chamada indutância equivalente, então a tensão entre os terminais de L_{eq} será igual a tensão entre os terminais do circuito original. Em relação à corrente, deve-se saber que a intensidade da que atravessa L_{eq} é a mesma da que atravessa todas as indutâncias em série do circuito original. Uma ilustração do circuito composto pela indutância equivalente é mostrada na figura 9.4(b) e ajuda a entender o que acabou de ser dito.

Associação de indutâncias em paralelo

Na figura 9.5(a) é mostrado um circuito com n indutâncias associadas em paralelo.

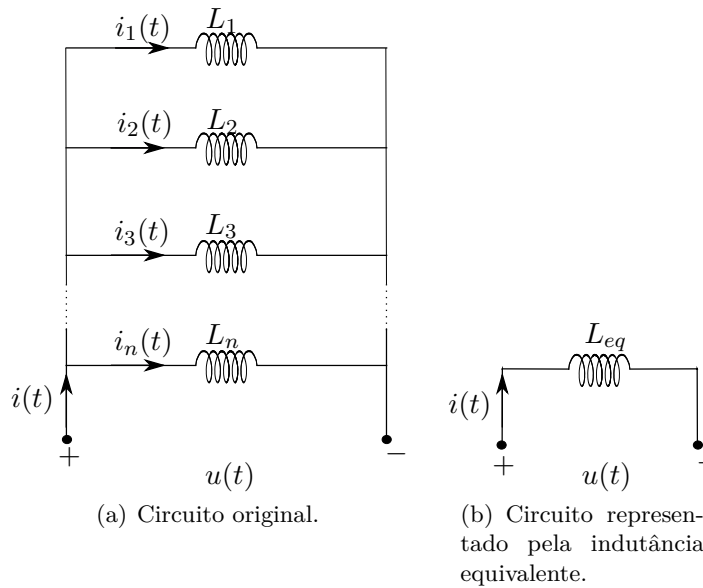


Figura 9.5: Circuitos elétricos para análise do conceito de indutância equivalente.

Todas as indutâncias em paralelo podem ser substituídas pela indutância equivalente L_{eq} , sendo o valor desta obtido por:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_n} \quad (9.6)$$

Há dois casos particulares que merecem atenção, como descrito a seguir:

1. circuito com apenas duas indutâncias em paralelo. Neste caso tem-se:

$$L_{eq} = \frac{L_1 \times L_2}{L_1 + L_2} \quad (9.7)$$

2. circuito com N indutâncias de mesmo valor L em paralelo. Neste caso tem-se:

$$L_{eq} = \frac{L}{N} \quad (9.8)$$

A representação da indutância equivalente, bem como da corrente e da tensão nos seus terminais (cujos valores são os mesmos do circuito original), é mostrada na figura 9.5(b).

9.2.3 Associação mista de indutâncias

Quando há em um mesmo circuito indutâncias associadas em série e em paralelo diz-se que há *associação mista de indutâncias*. Identificadas as formas de ligações das indutâncias (em série ou em paralelo) deve-se realizar as devidas simplificações para encontrar as variáveis elétricas desejadas.

Uma sugestão para que o estudante encontre L_{eq} de maneira mais fácil é:

Passo 1 Identificar todas as indutâncias que estão associadas em série e então calcular a indutância equivalente a elas;

Passo 2 Identificar todas as indutâncias que estão em paralelo e então calcular a indutância equivalente a elas;

Passo 3 Repetir os passos 1 e 2 até encontrar L_{eq} .

Exemplo 9.2. Calcule o valor da indutância equivalente, vista dos terminais a e b , nos circuitos elétricos mostrados na figura 9.6.

Solução:

- (a) No circuito da figura 9.6(a) vê-se que há três indutâncias em série e, portanto, o inverso da indutância equivalente é obtida somando-as. As operações matemáticas realizadas para solucionar a questão serão feitas utilizando-se a unidade de indutância, que é o henry (representado pela letra H); o estudante deve ficar atento ao fato de que as indutâncias foram dadas em mili henry (mH) e, portanto, é necessário realizar a transformação de mili henry para henry. Quando o estudante tiver mais experiência as contas poderão ser feitas diretamente.

A indutância equivalente do circuito da figura 9.6(a) é encontrada pela soma das indutâncias em série, como é mostrado seguir:

$$\begin{aligned} L_{eq} &= 10 \times 10^{-3} + 15 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-3} \\ L_{eq} &= 30 \times 10^{-3} \text{ H} \\ L_{eq} &= 30 \text{ mH} \end{aligned}$$

- (b) No circuito da figura 9.6(b) vê-se que há quatro indutâncias em paralelo e, portanto, a indutância equivalente é obtida fazendo-se a soma dos inversos, como indicado na equação (9.6) e feito na sequência:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_{eq}} &= \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} \\ \frac{1}{L_{eq}} &= \frac{1}{2 \times 10^{-3}} + \frac{1}{4 \times 10^{-3}} + \frac{1}{6 \times 10^{-3}} + \frac{1}{8 \times 10^{-3}} \end{aligned}$$

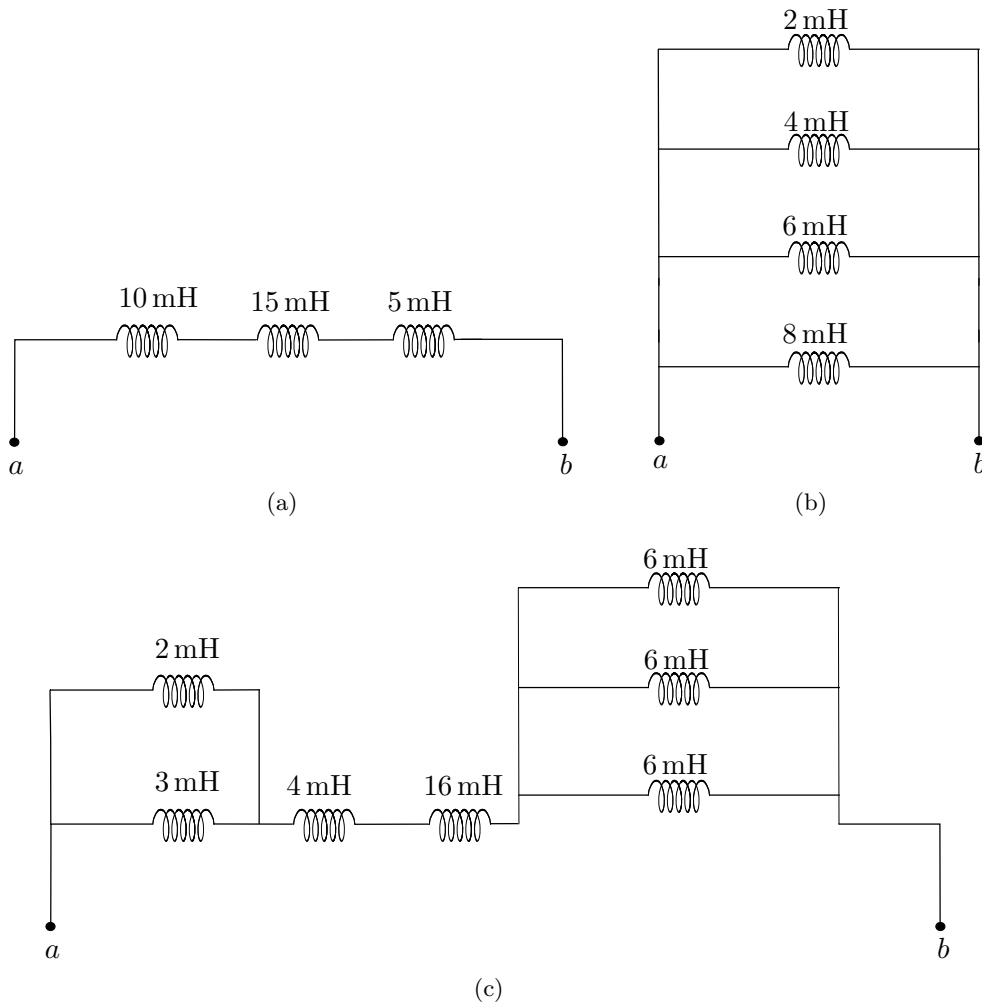


Figura 9.6: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 9.2.

O MMC entre os denominadores é 24×10^{-3} e assim tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_{eq}} &= \frac{12 + 6 + 4 + 3}{24 \times 10^{-3}} \\ \frac{1}{L_{eq}} &= \frac{25}{24 \times 10^{-3}} \\ L_{eq} &= \frac{24 \times 10^{-3}}{25} \\ L_{eq} &= 0,96 \times 10^{-3} \text{ H} \\ L_{eq} &= 0,96 \text{ mH}\end{aligned}$$

- (c) No circuito da figura 9.6(c) vê-se que as indutâncias estão associadas em série e em paralelo, ou seja, há associação mista de indutâncias. Seguindo a dica dada anteriormente, então serão procuradas as indutâncias que estão associadas em série e no caso são as de valores 4 mH e 16 mH, que podem ser substituídas por uma única cujo valor é soma, ou seja, $4 \times 10^{-3} + 16 \times 10^{-3} = 20 \times 10^{-3} \text{ H} = 20 \text{ mH}$. Assim o circuito fica como mostrado na figura 9.7(a); ainda nesta figura vê-se que são destacados os dois conjuntos de indutâncias em paralelo. O primeiro conjunto resultará na indutância equivalente L_{eq1} e o segundo conjunto na indutância equivalente L_{eq2} .

O valor de L_{eq1} pode ser obtido empregando a equação (9.7), ou seja, faz-se a multiplicação pela

soma, como é mostrado a seguir:

$$L_{eq1} = \frac{(2 \times 10^{-3}) \times (3 \times 10^{-3})}{(2 \times 10^{-3}) + (3 \times 10^{-3})}$$

$$L_{eq1} = \frac{6 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-3}}$$

$$L_{eq1} = 1,2 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$L_{eq1} = 1,2 \text{ mH}$$

Se as indutâncias em paralelo são iguais, então emprega-se a equação (9.8), ou seja, o valor das indutâncias pela quantidade. Assim tem-se que L_{eq2} vale:

$$L_{eq2} = \frac{6 \times 10^{-3}}{3}$$

$$L_{eq2} = 2 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$L_{eq2} = 2 \text{ mH}$$

O circuito redesenhado depois de feitas as simplificações é mostrado na figura 9.7(b). Novamente há apenas indutâncias em série e L_{eq} é encontrado com a soma:

$$L_{eq} = 1,2 \times 10^{-3} + 20 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-3}$$

$$L_{eq} = 23,2 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$L_{eq} = 23,2 \text{ mH}$$

A representação da indutância equivalente é mostrada na figura 9.7(c).

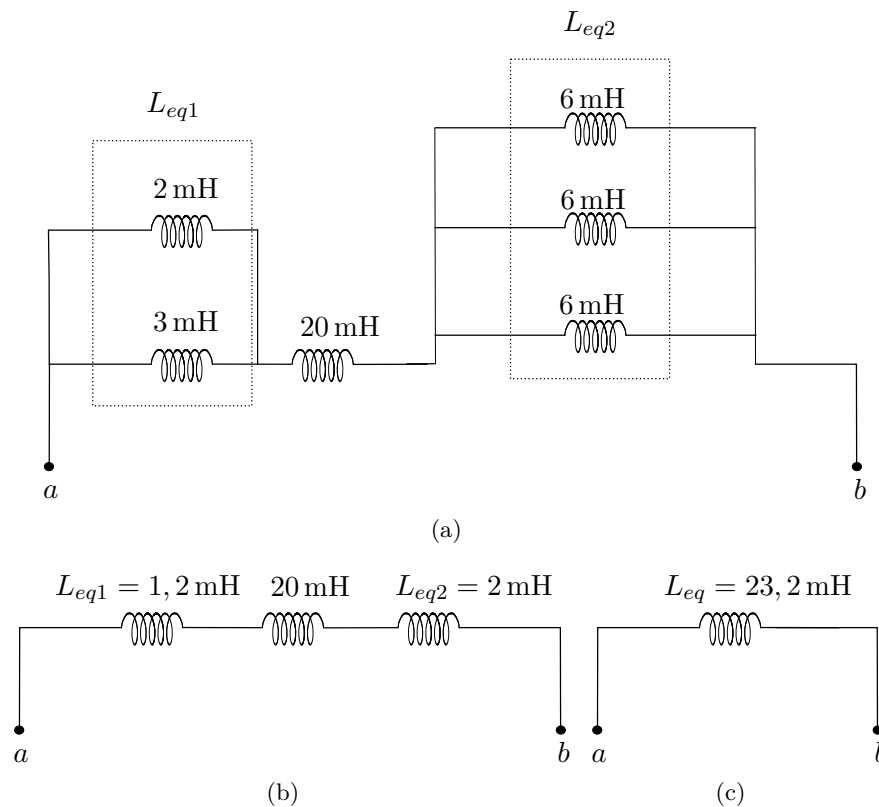


Figura 9.7: Circuitos elétricos utilizados para cálculo de L_{eq} .

□

Videoaula 9.1 (Indutância e indutor). Para mais detalhes sobre modelagem do efeito indutivo via indutâncias e sobre a construção do indutor acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/uM0X5rIVcBo>



9.3 Circuito capacitivo

O efeito capacitivo aparece em muitas partes de um circuito elétrico, desde uma linha de transmissão até entre trilhas de uma placa de circuito impresso de computador. Enquanto o efeito resistivo está presente independentemente da forma da onda da tensão, a capacitância, assim como a indutância, representa efeitos presentes quando as tensões e correntes elétricas variam no tempo.

Outra definição importante é do dispositivo físico chamado capacitor. Ambos, o elemento de circuito capacitância e o dispositivo físico capacitor, são objetos de estudo detalhados na sequência do texto.

9.3.1 Capacitância e capacitor

O resistor é modelado por um elemento de circuito chamado resistência. A representação do indutor em um circuito é feita pelo elemento indutância. Agora um novo dispositivo é apresentado: o capacitor e ele é modelado por uma capacitância, representada pela letra C .

Um capacitor elementar é construído com duas placas de metal como mostrado na figura 9.8(a) e um material isolante, chamado de dielétrico, entre as placas (nesta figura não está ilustrado o dielétrico para não dificultar a visualização). Na figura 9.8(b) o capacitor é ilustrado em outra posição e nesta figura estão mostradas as duas placas e o material dielétrico entre elas.

Antes de se prosseguir com os estudos sobre capacitores é necessário conhecer um fenômeno chamado de *indução de carga* que ocorre quando partes polarizadas positivamente são aproximadas de outras não polarizadas; a figura 9.9 auxiliará na explicação.

Quando um objeto A está polarizado positivamente (quando há mais prótons que elétrons em átomos do material) e ele é aproximado de outro, chamaremos de B , há o surgimento de elétrons nas proximidades deste último: isto é devido às forças de atração entre cargas de polaridades opostas. Quando este fenômeno acontece diz-se que houve polarização devido à indução de carga e quanto mais próximos os objetos A e B estiverem, maior será a carga negativa induzida em B e, portanto, maior será a repulsão das cargas negativas no objeto A que aumentará ainda mais sua carga positiva. Se houvesse um caminho, como um fio, haveria fluxo de elétrons de B para A . O fenômeno da indução de cargas auxiliará nas explicações que seguem.

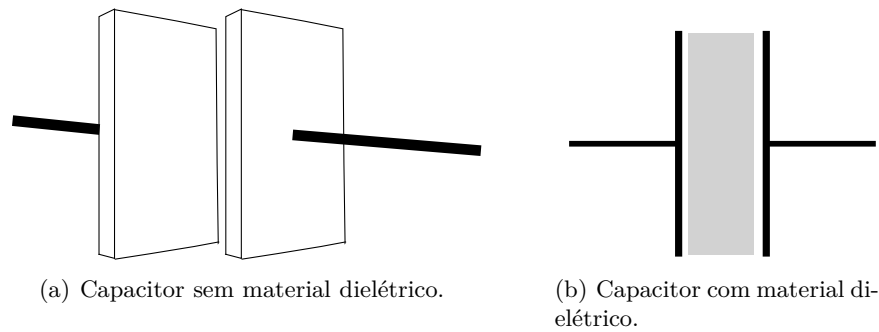


Figura 9.8: Ilustrações de um capacitor.

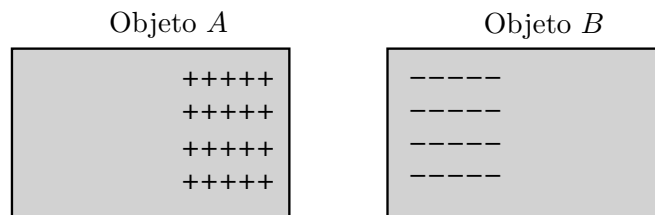


Figura 9.9: Indução de carga.

A ilustração para a representação do elemento capacitância em um circuito é mostrada na figura 9.10(a), na qual há também uma fonte de tensão contínua e duas chaves *ch1* e *ch2*.

Considerando-se inicialmente que a chave *ch1* e *ch2* estão abertas (ver novamente a figura 9.10(a)), então a fonte de tensão constante não está fornecendo potência elétrica para nenhum dispositivo. Você deve entender os elementos de circuito mostrados como modelos de dispositivos reais (bateria, capacitor e resistor). Duas situações são tratadas a seguir:

1. Se a chave *ch2* é mantida aberta e a chave *ch1* é fechada, então haverá fluxo de elétrons dos átomos da placa do capacitor para o terminal positivo da fonte de tensão contínua e assim esta placa estará polarizada positivamente (ver figura 9.10(b)): você precisa ter em mente que os prótons estão dentro do núcleo e não se deslocam, mas os elétrons estão na eletrosfera e possuem mobilidade. Lembrando que a corrente deve ser indicada no sentido oposto ao movimento dos elétrons, então haverá uma corrente i_1 . Devido a esta polarização positiva na placa haverá presença de elétrons na outra placa do capacitor com carga no mesmo módulo, porém com polaridade negativa, como mostrado na figura 9.10(b). O fluxo de elétrons da placa do capacitor só irá finalizar quando a tensão nos terminais do capacitor U_C for igual a da fonte de tensão contínua ($U_C = U$). Quando o fluxo de elétrons finalizar e ambas as placas estiverem polarizadas e o capacitor estiver com a mesma tensão da fonte de tensão, diz-se que o capacitor está carregado;
2. Supondo que a tensão nos terminais da fonte de tensão contínua é igual a tensão nos terminais do capacitor (como mostrado na situação anterior), então a chave *ch1* é aberta e posteriormente a chave *ch2* é fechada, como mostrado na figura 9.10(c). Os elétrons em excesso de uma placa do capacitor irão se deslocar através do fio, passando através do resistor, até a outra placa que está polarizada positivamente. Toda energia armazenada no capacitor é então dissipada em forma de calor pelo resistor. Quando o fluxo de elétrons finalizar e, portanto, ambas as placas do capacitor não estiverem mais polarizadas, diz-se que o capacitor está descarregado. Nesta situação, sem haver polarização das placas do capacitor, a tensão nos terminais do capacitor volta a ser nula.

Das situações analisadas pode-se notar que só há tensão nos terminais do capacitor enquanto as placas estiverem polarizadas e que a corrente só flui em um circuito com capacitor, enquanto há

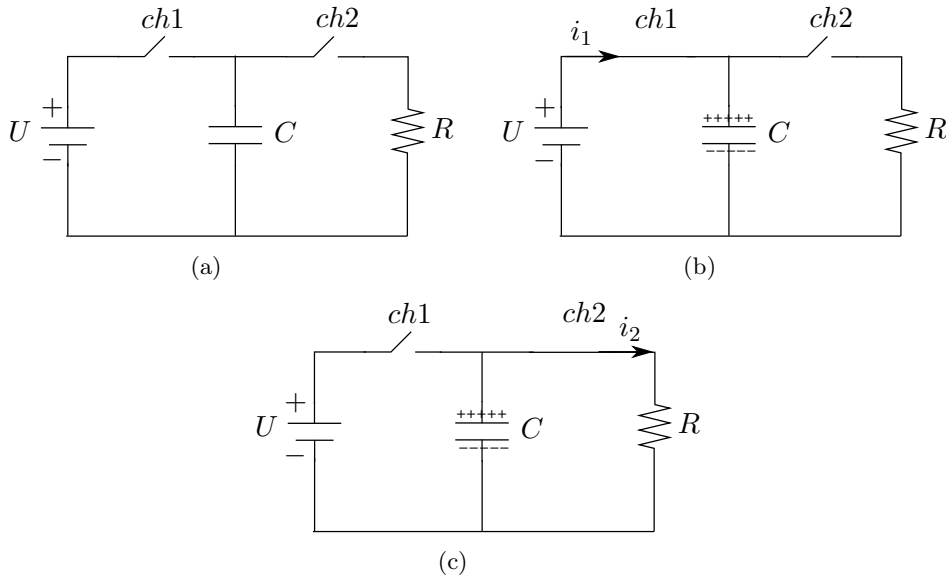


Figura 9.10: circuito para análise do capacitor.

variação da tensão. Na primeira das situações tratadas, só há corrente em direção ao capacitor, enquanto ele está se carregando e a tensão se elevou de zero ($U_C = 0$) até a tensão da fonte de tensão ($U_C = U$): neste instante parou de haver corrente. Na segunda situação, com o capacitor conectado somente ao resistor, a corrente foi diminuindo até se anular: no começo a tensão no capacitor era a mesma da fonte ($U_C = U$) e no final era nula ($U_C = 0$). A quantidade total de carga que pode ser acumulada por um capacitor depende da sua construção e é mensurada por um parâmetro chamado de capacitância C . A expressão a seguir relaciona a tensão nos terminais do capacitor e a quantidade de carga elétrica:

$$Q = CU \quad (9.9)$$

A equação (9.9) evidencia que se dois capacitores forem alimentados pela mesma fonte de tensão contínua, o de maior capacitância acumulará mais cargas em suas placas. Se a tensão for variada, então a quantidade de carga também será variada na mesma proporção e pode-se escrever:

$$\Delta Q = C \Delta U \quad (9.10)$$

Se a equação (9.10) for dividida em ambos os lados da igualdade por Δt , encontra-se:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = C \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad (9.11)$$

Lembrando que $i = \Delta Q / \Delta t$, então a equação (9.11) torna-se:

$$i = C \frac{dU}{dt} \quad (9.12)$$

Sendo $\Delta U = U_f - U_i$ e $\Delta t = t_f - t_i$; os subscritos f e i são usados para indicar os valores final e inicial, respectivamente.

A equação (9.12) evidencia que só há fluxo de elétrons (corrente) entre os terminais do capacitor se houver variação da tensão entre os terminais do dispositivo em questão.

Saliente-se que se o intervalo de tempo em avaliação tender à zero, então a equação 9.12 se tornará:

$$i = C \frac{dU}{dt} \quad (9.13)$$

Para o propósito do presente livro, as conclusões a serem tiradas da equação (9.13) também podem ser tiradas da equação (9.12). Esta última é válida quando a variação da tensão no tempo se dá de forma aproximadamente linear (para um Δt pequeno geralmente esta aproximação é válida).

Exemplo 9.3. Calcule a corrente que flui em um capacitor de capacitância de $100 \mu\text{F}$ quando submetido a uma variação de tensão de 20 V até 100 V em um intervalo de tempo de 40 ms .

Solução:

Pode-se usar diretamente a expressão (9.12), como é feito a seguir:

$$\begin{aligned} i &= C \frac{\Delta U}{\Delta t} \\ i &= (100 \times 10^{-6}) \left(\frac{100 - 20}{40 \times 10^{-3}} \right) \\ i &= (10^{-4}) \left(\frac{80}{0,04} \right) \\ i &= 10^{-4} \times 2000 \\ i &= (10^{-4}) \times (2 \times 10^3) \\ i &= 2 \times 10^{-1} \\ i &= 0,2 \text{ A} \end{aligned}$$

Foi considerado que a tensão aumentou linearmente e que a corrente estava, portanto, constante. Quando a tensão para de variar, então a corrente vai a zero.

□

Como já dito, o capacitor mais simples é constituído por duas placas de metal condutor e que dentro delas é posto material eletricamente isolante, que é também chamado de dielétrico. A grandeza permissividade elétrica ϵ cuja unidade é o farad/metro, ou simplesmente F/m , permite saber o quanto o material é isolante. Desta maneira, pode-se calcular a capacitância C de um capacitor empregando a expressão:

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad (9.14)$$

Sendo:

- A a área do material dielétrico e;
- d a distância entre as placas.

A análise da equação (9.14) evidencia que para se construir um capacitor de elevada capacitância deve-se utilizar placas grandes (com grande área) e que a distância entre elas deve ser a menor possível. Deve-se também escolher um material com elevada permissividade elétrica, ou seja, com elevado valor de ϵ . Geralmente é utilizado o valor da permissividade elétrica em relação à do vácuo, sendo que esta vale $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$. Assim o valor de ϵ para um material qualquer é dado pela expressão:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (9.15)$$

Exemplo 9.4. Um capacitor possui placas cuja área de cada uma vale $0,003 \text{ m}^2$ e que estão a uma distância de $0,00001 \text{ m}$ uma da outra. O material dielétrico utilizado possui permissividade elétrica relativa de valor igual a seis. Qual é o valor da capacitância do capacitor?

Solução:

Através da equação (9.15) encontra-se a permissividade dielétrica do material. Tem-se assim:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 \epsilon_r \\ \epsilon &= (8,854 \times 10^{-12}) \times (6) \\ \epsilon &= 5,3124 \times 10^{-11} \text{ F/m} \end{aligned}$$

Pode-se agora calcular a capacitância utilizando a equação (9.14), como feito a seguir:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

$$C = \frac{(5,3124 \times 10^{-11}) \times (0,003)}{(0,0001)}$$

$$C = 1,59 \times 10^{-9} \text{ F}$$

$$C = 1,59 \text{ nF}$$

□

A figura 9.11 mostra fotos de dois capacitores comerciais; um deles para circuitos de elevada potência (figura 9.11(a)) e o outro empregado tipicamente em placas de circuito impresso (figura 9.11(b)). Enquanto o capacitor de potência já oferece em sua embalagem o valor da tensão eficaz suportável (no caso, 400 V eficazes), o capacitor para circuito eletrônico diz o valor de pico, pois o valor pode ser senoidal, contínuo ou ter outra forma de onda.



(a) Capacitor de 40 μF para tensão eficaz de até 400 V e frequências de 50 ou 60 Hz.



(b) Capacitor de 100 μF para circuitos eletrônicos de tensão máxima de 16 V.

Figura 9.11: Fotos de capacitores.

9.3.2 Associação de capacitâncias

Pode-se substituir um conjunto de capacitâncias conectadas por uma única chamada de *capacitância equivalente*. Os procedimentos são detalhados a seguir.

Associação de capacitâncias em série

Quando há várias capacitâncias associadas em série, como as mostradas na figura 9.12(a), pode-se reduzir todas elas a uma única que é chamada de *capacitância equivalente*, mostrada na figura 9.12(b). Assim, a tensão $u(t)$ nos terminais da capacitância equivalente é igual à tensão nos terminais da associação e a corrente que atravessa a capacitância equivalente $i(t)$ possui o mesmo valor da corrente que atravessa as capacitâncias da associação.

Diferentemente dos casos de resistências e indutâncias nas quais a associação pode ser reduzida a um único elemento pela soma de cada um dos elementos, a associação de capacitâncias em série é feita fazendo-se a soma dos inversos:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (9.16)$$

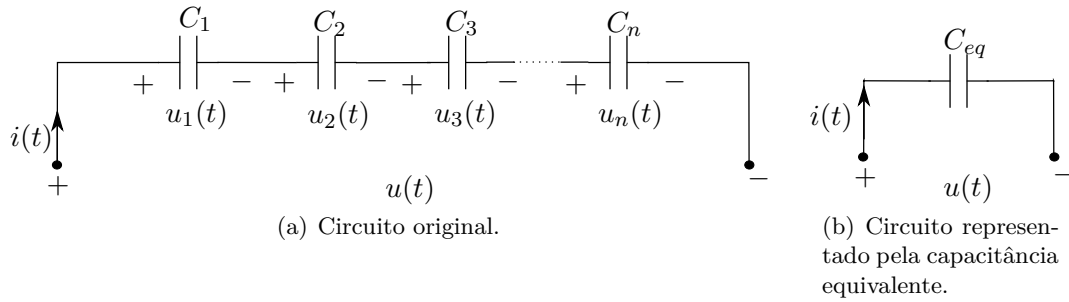


Figura 9.12: Circuitos elétricos para análise do conceito de capacitância equivalente.

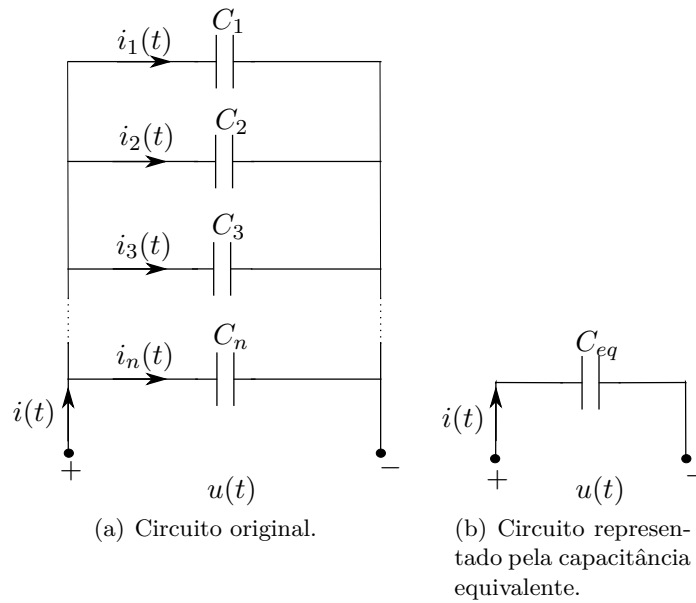


Figura 9.13: Circuitos elétricos para análise do conceito de capacitância equivalente.

Há dois casos particulares que merecem atenção, como descrito a seguir:

1. circuito com apenas duas capacitâncias em série. Neste caso tem-se:

$$C_{eq} = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} \quad (9.17)$$

2. circuito com N capacitâncias de mesmo valor C em série. Neste caso tem-se:

$$C_{eq} = \frac{C}{N} \quad (9.18)$$

Associação de capacitâncias em paralelo

Quando há várias capacitâncias associadas em paralelo, como as mostradas na figura 9.13(a), pode-se reduzir todas elas a uma única que é chamada de *capacitância equivalente*, mostrada na figura 9.13(b), e a tensão nos terminais desta capacitância $u(t)$ é igual à tensão nos terminais da associação e a corrente que atravessa a capacitância equivalente $i(t)$ possui o mesmo valor da corrente drenada por todas as capacitâncias da associação.

Para se reduzir uma associação de capacitâncias em paralelo a uma única (a capacitância equivalente) faz-se:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n \quad (9.19)$$

Associação mista de capacitâncias

Quando há em um mesmo circuito capacitâncias associadas em série e em paralelo diz-se que há *associação mista de capacitâncias*. Identificadas as formas de ligações das capacitâncias (em série ou em paralelo) deve-se realizar as devidas simplificações para encontrar as variáveis elétricas desejadas.

De maneira análoga aos casos de associação mista de resistências e de indutâncias, pode-se encontrar a capacitância equivalente C_{eq} seguindo os passos a seguir:

Passo 1 Identificar todas as capacitâncias que estão associadas em série e então calcular a capacitância equivalente a elas;

Passo 2 Identificar todas as capacitâncias que estão em paralelo e então calcular a capacitância equivalente a elas;

Passo 3 Repetir os passos 1 e 2 até encontrar C_{eq} .

Exemplo 9.5. Calcule a capacitância equivalente vista dos terminais a e b dos circuitos elétricos mostrados na figura 9.14.

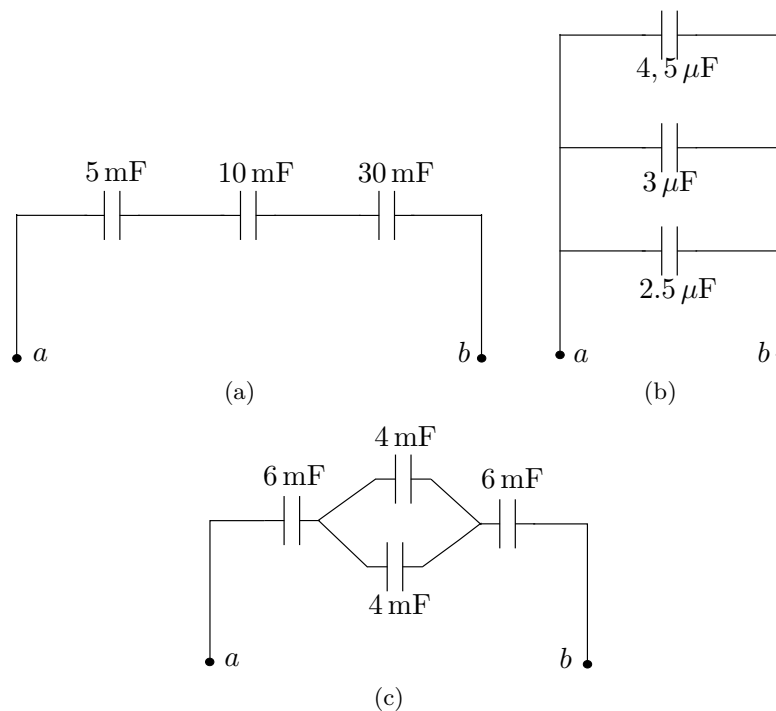


Figura 9.14: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 9.5.

Solução:

O circuito mostrado na figura 9.14(a) possui três capacitâncias em série e, portanto, deve-se utilizar

a equação (9.16), como é feito a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{5 \times 10^{-3}} + \frac{1}{10 \times 10^{-3}} + \frac{1}{30 \times 10^{-3}} \\ \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{6 + 3 + 1}{30 \times 10^{-3}} \\ \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{10}{30 \times 10^{-3}} \\ C_{eq} &= \frac{30 \times 10^{-3}}{10} \\ C_{eq} &= 3 \times 10^{-3} \text{ F} \\ C_{eq} &= 3 \text{ mF}\end{aligned}$$

O circuito mostrado na figura 9.14(b) possui três capacitâncias em paralelo e, portanto, deve-se utilizar a equação (9.19), como é feito a seguir:

$$\begin{aligned}C_{eq} &= C_1 + C_2 + C_3 \\ C_{eq} &= 2,5 \times 10^{-6} + 3 \times 10^{-6} + 4,5 \times 10^{-6} \\ C_{eq} &= 10 \times 10^{-6} \text{ F} \\ C_{eq} &= 10 \mu\text{F}\end{aligned}$$

O circuito mostrado na figura 9.14(c) possui tanto capacitâncias associadas em série quanto em paralelo, ou seja, há associação mista de capacitâncias. Pode-se primeiramente procurar aquelas que estão em série, no caso as duas de 6 mF. Quando há capacitâncias de mesmo valor em série pode-se empregar a equação (9.18). Assim tem-se:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{C}{N} \\ C_1 &= \frac{6 \times 10^{-3}}{2} \\ C_1 &= 3 \times 10^{-3} \text{ F} \\ C_1 &= 3 \text{ mF}\end{aligned}$$

Observando o circuito da figura 9.14(c) pode-se notar que as duas capacitâncias de 4 mF estão em paralelo e, portanto, pode-se encontrar a capacitância equivalente delas fazendo-se a soma como pode ser visto a seguir:

$$\begin{aligned}C_2 &= 4 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-3} \\ C_2 &= 8 \times 10^{-3} \text{ F} \\ C_2 &= 8 \text{ mF}\end{aligned}$$

A figura 9.15 mostra um circuito obtido depois destas simplificações. Nele há duas capacitâncias

em série e C_{eq} é obtida utilizando-se mais uma vez a multiplicação pela soma das capacitâncias:

$$\begin{aligned}C_{eq} &= \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} \\C_{eq} &= \frac{3 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-3} + 8 \times 10^{-3}} \\C_{eq} &= \frac{24 \times 10^{-6}}{11 \times 10^{-3}} \\C_{eq} &= \frac{24}{11} \times 10^{-3} \\C_{eq} &= 2,18 \times 10^{-3} \text{ F} \\C_{eq} &= 2,18 \text{ mF}\end{aligned}$$

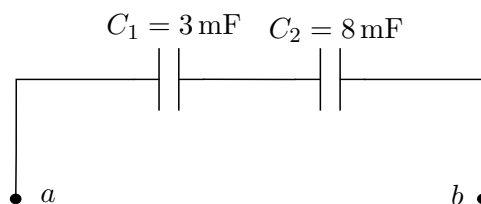


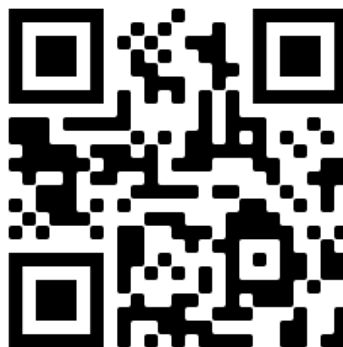
Figura 9.15: circuito utilizado na solução do exemplo 9.5.

Muitas vezes o estudante pensa em realizar a substituição de várias capacitâncias por uma única, mas na prática é muito comum que estes conceitos sejam utilizados de forma inversa. Após dimensionar-se um capacitor, nem sempre encontra-se componente comercial com capacitância igual ou mesmo próxima ao valor calculado. Qual é a solução? Realizar a associação de capacitores, de maneira que este conjunto resulte num valor de capacitância pelo menos muito próximo do valor calculado no projeto.

□

Videoaula 9.2 (Capacitância e capacitor). Para mais detalhes sobre modelagem do efeito capacitivo via capacitâncias e sobre a construção do capacitor acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/94JXP0zUq4A>



9.4 Resumo de capítulo

Dois elementos de circuitos novos foram apresentados no presente capítulo: a capacitância e a indutância. Eles representam os efeitos capacitivo e indutivo, respectivamente. Os dispositivos específicos que são construídos quando se deseja empregar estes efeitos são: o capacitor e o indutor. Outros detalhes apresentados no presente capítulo são apresentados resumidamente a seguir:

- O efeito indutivo só ocorre quando o circuito está submetido a uma corrente de valor variável;
- O efeito capacitivo só ocorre quando o circuito está submetido a uma tensão de valor variável;
- O efeito indutivo se dá devido à indução de tensão quando há campo magnético de valor variável concatenando os fios. Muitas vezes o efeito indutivo é indesejável, porém muitas outras vezes se utiliza o indutor em um circuito propositalmente;
- As indutâncias podem ser associadas em série ou em paralelo. A indutância equivalente é calculada da mesma maneira que no caso das resistências, somando-as quando estão em série ou fazendo o inverso da soma dos inversos quando estão em paralelo;
- O efeito capacitivo se dá nos capacitores quando há variação de carga nas suas placas devido a uma tensão variável;
- As capacitâncias podem ser associadas em série ou em paralelo. A capacitância equivalente é calculada, quando estão em série, encontrando-se o inverso da soma dos inversos das capacitâncias individuais e, quando estão em paralelo, calculando-se a soma das capacitâncias individuais.

Problemas propostos

Problema 9.1. São feitos vários experimentos com um indutor, cuja indutância é de $30\ \mu H$. Calcule a magnitude da tensão nos terminais do indutor durante o tempo que ocorre os experimentos descritos a seguir:

- (a) No primeiro experimento fez-se a corrente do indutor aumentar de 0 A até 20 A em um intervalo de tempo de $20\ \mu s$;
- (b) No segundo experimento fez-se a corrente do indutor diminuir de 20 A até 0 A em um intervalo de tempo de $20\ \mu s$;
- (c) O que pode-se dizer em relação aos sinais dos valores das tensões induzidas calculadas nos itens anteriores?

Problema 9.2. Calcule a magnitude da corrente num circuito que possui uma fonte de tensão conectada a um capacitor de $10\ \mu F$. Considere as seguintes situações:

- (a) Se a fonte de tensão conectada ao capacitor fornece uma tensão constante;
- (b) Se a fonte de tensão conectada ao capacitor tem a tensão aumentada de 0 V até 100 V em um intervalo de tempo de $20\ \mu s$;
- (c) Se a fonte de tensão conectada ao capacitor tem a tensão aumentada de 100 V até 0 V em um intervalo de tempo de $20\ \mu s$;

Problema 9.3. Calcule o valor da indutância vista a partir dos terminais *a* e *b* dos circuitos elétricos mostrados na figura 9.16.

Problema 9.4. Calcule o valor da capacitância vista a partir dos terminais *a* e *b* dos circuitos elétricos mostrados na figura 9.17.

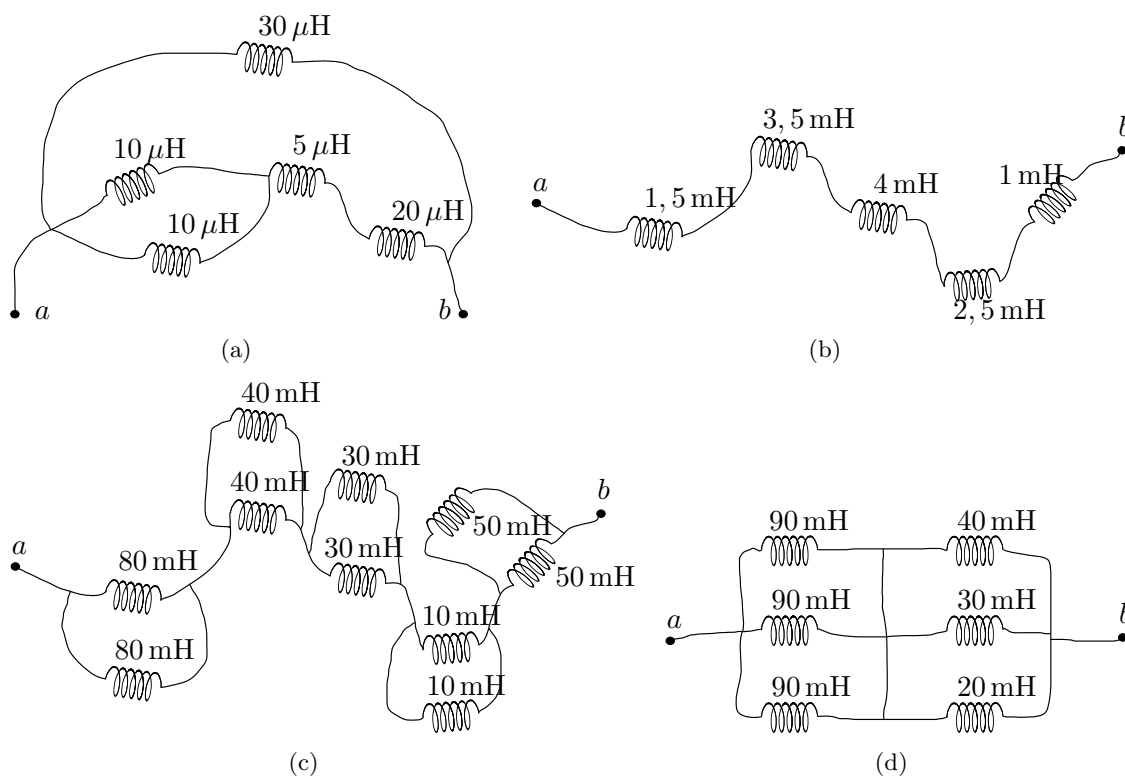


Figura 9.16: Circuitos elétricos relativos ao problema 9.3.

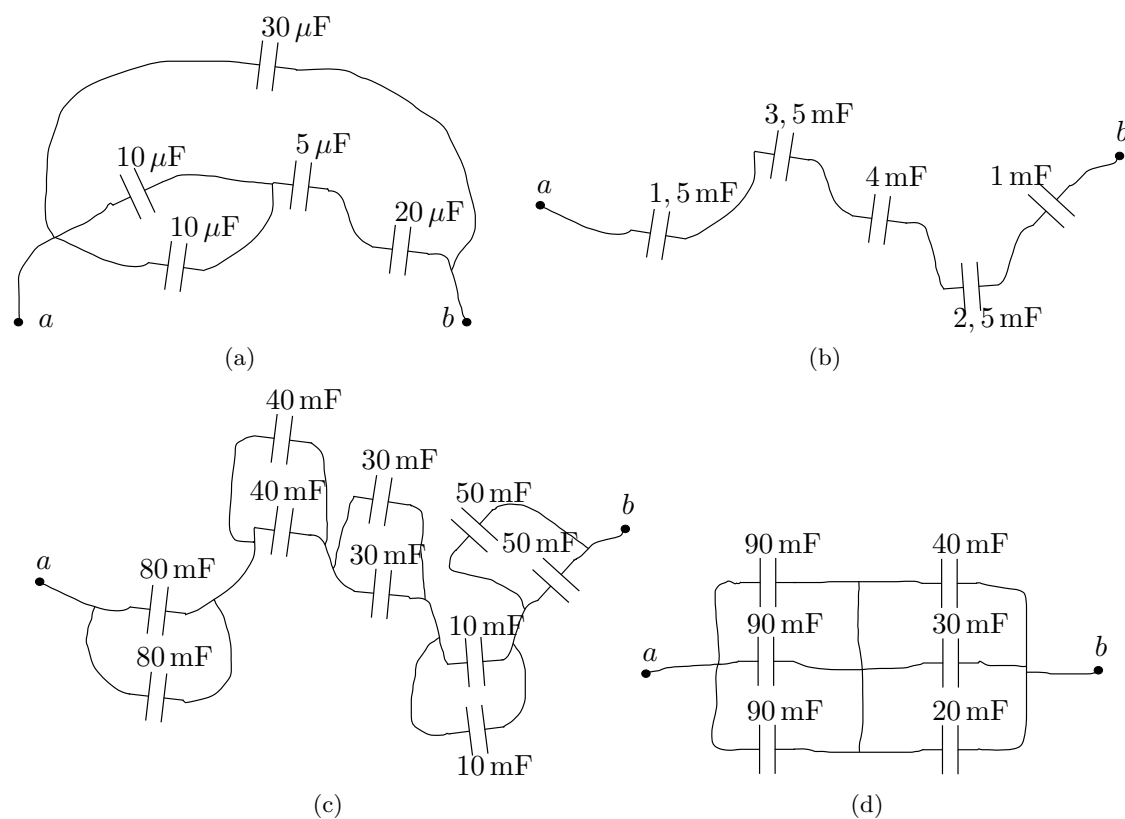


Figura 9.17: Circuitos elétricos relativos ao problema 9.4.

Capítulo 10

Circuitos básicos com impedâncias

10.1 Introdução

Neste capítulo é mostrado como determinar grandezas elétricas em circuitos elétricos cuja fonte de alimentação (de tensão ou de corrente) é alternada senoidal/cossenoidal. A maneira usual de resolver problemas deste tipo de circuito é empregando a representação de funções senoidais/cossenoidais por fasores complexos, pois isto facilita os cálculos. Da divisão entre os fasores tensão e corrente surge o conceito de impedância, que também é um número complexo. Para entendimento do presente capítulo, é mandatório que o estudante tenha dominado os conceitos apresentados no capítulo 8; este tratou de funções senoidais/cossenoidais e números complexos.

10.2 Valor eficaz de um sinal alternado senoidal

Foi visto nos capítulos iniciais do presente livro que uma tensão contínua cria uma corrente contínua circulante por um resistor e este dissipa a energia em forma de calor; esta situação pode ser descrita em uma ilustração de um circuito mostrada na figura 10.1(a). Porém, grande parte das fontes de tensão é senoidal e, caso se tenha um equipamento que foi projetado para operar com tensão contínua, pode ser necessário responder esta questão: *que valor de tensão senoidal deve ser aplicado para que o dispositivo funcione com a mesma potência e, portanto, exerça o mesmo trabalho para que foi projetado em tensão contínua?* Esta seção é dedicada a fornecer uma resposta a esta pergunta e discute uma relação entre os valores das tensões contínua e senoidal quando se deseja manter a potência média fornecida/consumida por um dispositivo. A figura 10.1(b) modela o mesmo resistor (representado pela resistência R), porém agora ele é alimentado por uma fonte de tensão alternada.

Foi mostrado no capítulo 8, que tratou dos conceitos matemáticos para a análise de circuitos com tensões e correntes alternadas, que sinais alternados cossenoidais de tensão ou corrente são representados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}u(t) &= U_P \cos(\omega t + \theta_u) \\ i(t) &= I_P \cos(\omega t + \theta_i)\end{aligned}$$

Sendo:

- U_P e I_P os valores máximos (de pico) para as cossenoides de tensão e corrente, respectivamente;
- ω a frequência angular das cossenoides de tensão e corrente;
- θ_u e θ_i os argumentos das cossenoides de tensão e corrente, respectivamente.

Focando a análise na comparação entre os circuitos da figura 10.1, o resistor, modelado pela resistência R , dissipará uma potência instantânea igual a $p(t) = Ri(t)^2$ no circuito CA e $P = RI_{ef}^2$ no circuito CC.

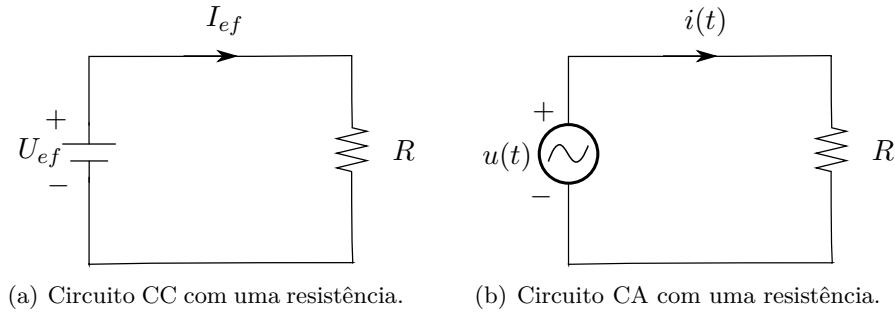


Figura 10.1: Circuitos CC e CA para análise do valor eficaz.

A potência $p(t)$ não possui valor constante, já que a corrente é senoidal e, portanto, o valor de $i(t)^2$ também não será constante. Porém, em um intervalo de tempo Δt , a energia dissipada pelo resistor é a mesma se ele for alimentado por qualquer uma das fontes, contínua ou senoidal, desde que as tensões das fontes se relacionem da seguinte forma: $U_{ef} = U_P/\sqrt{2}$, ou seja, se a tensão contínua tiver o valor da tensão de pico da cossenoide dividida por raiz de dois. Se a energia dissipada em forma de calor em um mesmo intervalo de tempo é a mesma, então pode-se dizer que a potência média dissipada pelo resistor quando alimentado por qualquer uma das fontes também é a mesma. Isto quer dizer que pode-se utilizar o mesmo resistor para dissipar a mesma potência média se a relação $\sqrt{2}$ entre as tensões descritas for respeitada.

Geralmente, os valores dos equipamentos projetados para operar com tensão e corrente senoidais são dados com valores eficazes e não com seus valores de pico. Na rede elétrica residencial a tensão tem frequência de 60 Hz e magnitude de 127 V ou 220 V eficazes¹. Para representar uma onda senoidal, foi mostrado que pode-se empregar o seu valor de pico e a fase, na representação polar. Porém, quando se utiliza a representação fasorial (daqui a pouco este conceito será explicado) emprega-se o valor eficaz. Assim tem-se que U_{ef} e I_{ef} são chamados de *tensão eficaz* e *corrente eficaz*, respectivamente. Para sinais alternados senoidais, a tensão e corrente eficazes assumem os seguintes valores:

$$\begin{cases} U_{ef} = \frac{U_P}{\sqrt{2}} \\ I_{ef} = \frac{I_P}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (10.1)$$

Sendo assim, os sinais alternados senoidais de tensão e corrente podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\begin{cases} u(t) = U_{ef}\sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_u) \\ i(t) = I_{ef}\sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_i) \end{cases} \quad (10.2)$$

O uso dos valores eficazes na representação de ondas de tensão e corrente por fasores é tão comum que com o andamento dos estudos não será nem necessário dizer que os valores dados são eficazes, pois isto deve ser já considerado pelo estudante.

Exemplo 10.1. Determine os valores eficazes para os sinais senoidais abaixo.

(a) $u(t) = 180\text{sen}(377t - 45^\circ) \text{ V}$

(b) $u(t) = 311 \cos(500t - 30^\circ) \text{ V}$

(c) $i(t) = 12\text{sen}(377t) \text{ A}$

¹Há outros valores possíveis, mas estes dois são os mais comuns

$$(d) \ i(t) = 100 \cos(500t - 50^\circ) \text{ A}$$

Solução:

Basta utilizar as relações dadas na equação (10.1).

$$(a) \ U_{ef} = \frac{U_P}{\sqrt{2}} = \frac{180}{\sqrt{2}} = 127,28 \text{ V}$$

$$(b) \ U_{ef} = \frac{U_P}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 219,91 \text{ V}$$

$$(c) \ I_{ef} = \frac{I_P}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 8,49 \text{ A}$$

$$(d) \ I_{ef} = \frac{I_P}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70,71 \text{ A}$$

Note que se estas tensões e correntes senoidais fossem substituídas por fontes de tensão ou de corrente contínuas com os valores eficazes calculados, haveria a mesma dissipação de potência média num resistor. Assim, para o caso (a), por exemplo, pode-se usar uma fonte alternada de $180 \sin(377t - 45^\circ) \text{ V}$ ou uma fonte contínua de 127,28 V para se obter o mesmo calor dissipado (no mesmo resistor, obviamente). Esta é a interpretação do valor eficaz: uma equivalência entre circuitos CC e CA.

□

Exemplo 10.2. Qual é o valor de pico de uma tensão senoidal que quando conectada aos terminais de um resistor $R = 2 \ \Omega$ faz com que o mesmo dissipe uma potência de 50 W?

Solução:

Sendo:

$$\begin{aligned} P &= \frac{U_{ef}^2}{R} \\ 50 &= \frac{U_{ef}^2}{2} \\ U_{ef} &= \sqrt{50 \times 2} \\ U_{ef} &= \sqrt{100} \\ U_{ef} &= 10 \text{ V} \end{aligned}$$

Sendo assim:

$$U_P = U_{ef}\sqrt{2} = 10\sqrt{2} = 14,142 \text{ V}$$

Uma fonte de tensão alternada de valor de pico de 14,142 V ou uma fonte de tensão contínua de 10 V farão com que a potência consumida pelo dispositivo modelado pela resistência de $2 \ \Omega$ seja 50 W.

□

Videoaula 10.1 (Valor eficaz de grandezas senoidais/cossenoidais). Para mais informações sobre o conceito de valor eficaz e seu uso com a forma de onda senoidal/cossenoidal acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/lwNsv2qmeyk>



10.3 Representação fasorial de grandezas senoidais

Fasor complexo ou simplesmente *fasor* é uma maneira alternativa de se representar grandezas senoidais/cossenoidais. O maior benefício da notação fasorial é a simplicidade nos procedimentos para os cálculos envolvendo as quatro operações básicas quando variáveis com comportamento senoidal/cossenoidal estão envolvidas.

Qualquer sinal senoidal/cossenoidal pode ser representado por meio de um fasor, o qual contém as informações sobre o valor eficaz e o argumento. O argumento, quando se trata dos estudos de eletricidade é chamado de *ângulo de fase*, *ângulo do fasor* ou simplesmente *fase*.

As representações fasoriais para sinais alternados cossenoidais de tensão e corrente são:

$$\begin{cases} u(t) = U_{ef}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_u) \\ \bar{U} = U_{ef}\underline{\theta_u} \end{cases} \quad (10.3)$$

e

$$\begin{cases} i(t) = I_{ef}\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta_i) \\ \bar{I} = I_{ef}\underline{\theta_i} \end{cases} \quad (10.4)$$

O exemplo a seguir evidencia como se realiza a representação fasorial de uma grandeza cossenoidal.

Exemplo 10.3. Determine os fasores equivalentes para os sinais senoidais abaixo.

(a) $u(t) = 180\cos(377t + 45^\circ) \text{ V}$

(b) $u(t) = 311\cos(500t + 30^\circ) \text{ V}$

(c) $i(t) = 12\cos(377t) \text{ A}$

(d) $i(t) = 100\cos(500t - 50^\circ) \text{ A}$

Solução:

Utilizando as expressões (10.3) e (10.4), encontra-se os respectivos fasores.

- (a) $\bar{U} = U_{ef} \angle \theta_u = (180/\sqrt{2}) \angle 45^\circ = 127,28 \angle 45^\circ \text{ V}$
- (b) $\bar{U} = U_{ef} \angle \theta_u = (311/\sqrt{2}) \angle 30^\circ = 219,91 \angle 30^\circ \text{ V}$
- (c) $\bar{I} = I_{ef} \angle \theta_i = (12/\sqrt{2}) \angle 0^\circ = 8,49 \angle 0^\circ \text{ A}$
- (d) $\bar{I} = I_{ef} \angle \theta_i = (100/\sqrt{2}) \angle -50^\circ = 70,71 \angle -50^\circ \text{ A}$

□

Videoaula 10.2 (Como representar formas de onda cossenoidais como fasores). Para mais informações sobre como representar sinais no tempo cujo comportamento possa ser modelado por uma onda cossenoidal em um fasor e vice-versa acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/bLJ5sam1pVI>



10.4 Relações fasoriais para os elementos de circuitos: resistência, indutância e capacitância

10.4.1 Resistência

Já foi tratado neste livro como deve-se calcular grandezas elétricas quando há resistências em um circuito alimentado por fontes de tensão/corrente contínuas. A partir de agora é necessário dominar os conceitos relacionados às resistências, quando este elemento faz parte de um circuito cuja alimentação é composta por fontes de tensão/corrente alternadas. No caso mais simples (mostrado na figura 10.2(a)), tem-se uma resistência, a d.d.p. em seus terminais e a corrente que a atravessa.

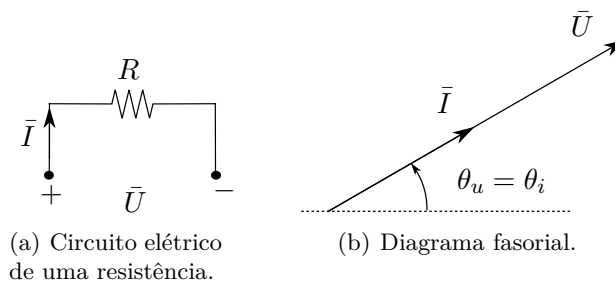


Figura 10.2: Análise de um circuito composto por uma única resistência elétrica.

O estudante deve ficar atento à notação da d.d.p. e da corrente, pois, como são grandezas elétricas representadas por fasores complexos (que são números complexos), são indicadas por um traço acima da variável ($\bar{U}$ e $\bar{I}$, representam os fasores tensão e corrente, respectivamente). No caso de serem conhecidos apenas os valores destes dois fasores e desejar-se calcular o valor da resistência, deve-se então calcular R com a expressão da lei de Ohm considerando uma relação entre fasores:

$$R = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \quad (10.5)$$

Saliente-se que a d.d.p. nos terminais da resistência ($\bar{U}$) e a corrente que a atravessa ($\bar{I}$) estão em fase, o que é representado pelo diagrama fasorial da figura 10.2(b) e permite escrever, portanto, que $\theta_u = \theta_i$ e:

$$\begin{aligned} \phi &= \theta_u - \theta_i \\ \phi &= 0^\circ \end{aligned} \quad (10.6)$$

Sendo que ϕ representa o ângulo de atraso da corrente em relação à tensão, que neste caso é nulo, já que estão em fase. Uma observação adicional: quando o efeito indutivo foi apresentado (ver seção 9.2.1), ϕ representava o fluxo magnético, mas é habitual usar um mesmo símbolo ou letra para representar grandezas distintas em temas distintos, então não faça confusão.

O estudante deve lembrar que a unidade da resistência é o Ω , que é a unidade obtida pela divisão de uma tensão por uma corrente.

A resistência modela a transformação de potência elétrica noutro tipo, não somente elétrica, ainda que seja esta a aplicação usual nos cursos introdutórios de eletricidade. Portanto, deve-se ter em mente que se uma tensão e corrente estão em fase nos terminais de um equipamento elétrico, este pode ser tratado como um dispositivo puramente resistivo e toda potência elétrica a ele fornecida será transformada noutro tipo: mecânica, térmica, química etc.

10.4.2 Indutância e reatância indutivas

Em um circuito puramente indutivo, como o mostrado na figura 10.3(a), são identificados o fasor tensão $\bar{U}$ nos terminais da indutância, o fasor corrente $\bar{I}$ que a atravessa e uma representação do efeito indutivo, chamada de reatância indutiva X_L , que é utilizada no circuito na forma complexa jX_L , sendo que j é a unidade imaginária.

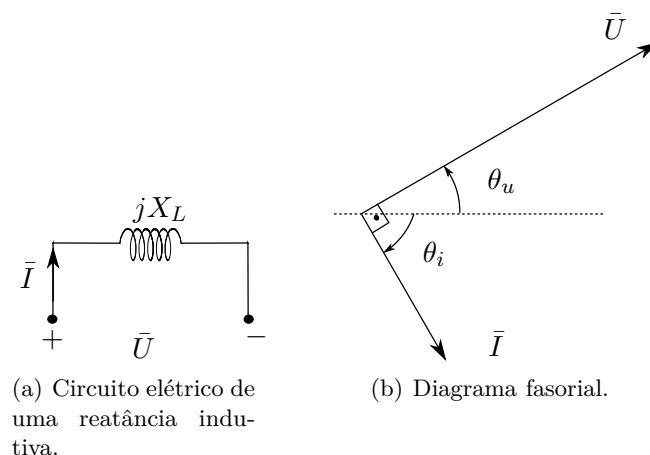


Figura 10.3: Análise de um circuito composto por uma única reatância indutiva.

A reatância indutiva é sempre positiva ($X_L > 0$). Conforme o estudante perceberá no decorrer dos seus estudos, é muito mais comum os livros e profissionais modelarem o efeito indutivo por uma

reatância indutiva do que por uma indutância. A divisão do fasor tensão pelo fasor corrente resulta em:

$$jX_L = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \quad (10.7)$$

Saliente-se que o fasor tensão está adiantado em 90° em relação ao fasor corrente o número imaginário j surge exatamente para evidenciar isto, pois $j = 1/90^\circ$. Obviamente pode-se dizer também que o fasor corrente que atravessa a reatância indutiva está 90° atrasado em relação a d.d.p. em seus terminais, como indicado no diagrama fasorial da figura 10.3(b) e explicitado matematicamente por:

$$\begin{aligned} \phi &= \theta_u - \theta_i \\ \phi &= 90^\circ \end{aligned} \quad (10.8)$$

Como ϕ indica o ângulo de atraso da corrente em relação à tensão, então ele é positivo nas cargas indutivas. Pode-se calcular o valor de X_L como mostrado a seguir:

$$X_L = \omega L \quad (10.9)$$

Sendo $\omega = 2\pi f$ (f é a frequência da tensão aplicada nos terminais da reatância indutiva) e L é o valor da indutância. A unidade da reatância indutiva também é o ohm, representado por Ω , pois é derivada da divisão de uma tensão por uma corrente. O estudante não deve confundir as unidades de indutância, que é o henry (H), e da reatância indutiva, que é o ohm (Ω). Enquanto a indutância pode representar o efeito indutivo sob qualquer situação, a reatância indutiva representa este efeito somente quando tensões e correntes senoidais estão presentes nos circuitos elétricos.

A análise da equação (10.9) evidencia que a reatância indutiva é proporcional à frequência angular ω , que também é proporcional à frequência f . Desta maneira, se a frequência da fonte de alimentação do circuito é elevada, então a reatância indutiva será elevada, aumentando a dificuldade de passagem de corrente devido ao efeito indutivo. No caso da frequência ser nula (fonte de tensão contínua), então a reatância vale zero, isto quer dizer que o efeito indutivo é nulo, o que pode ser interpretado como um curto-circuito.

10.4.3 Capacitância/Reatância capacitiva

Em um circuito puramente capacitivo como o mostrado na figura 10.4(a) são identificados o fasor tensão nos terminais da capacitância $\bar{U}$, o fasor corrente que a atravessa $\bar{I}$ e uma representação do efeito capacitivo $-jX_C$, sendo que $-j$ indica o oposto do número imaginário e X_C é a reatância capacitiva, que é sempre positiva ($X_C > 0$). Conforme o estudante perceberá no decorrer dos seus estudos, é muito mais comum os livros e profissionais modelarem o efeito capacitivo por uma reatância capacitiva do que por uma capacitância. O valor da reatância capacitiva é calculado por:

$$-jX_C = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \quad (10.10)$$

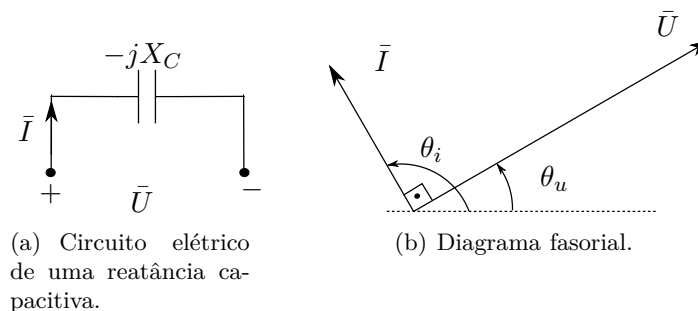


Figura 10.4: Análise de um circuito composto por uma única reatância capacitiva.

Saliente-se que o fasor corrente que atravessa a reatância capacitiva está 90° adiantado em relação a d.d.p. em seus terminais, como indicado no diagrama fasorial da figura 10.4(b). Pode-se escrever, portanto, que:

$$\begin{aligned}\phi &= \theta_u - \theta_i \\ \phi &= -90^\circ\end{aligned}\tag{10.11}$$

Lembrando que ϕ representa o ângulo de atraso da corrente em relação à tensão e, portanto, quando a corrente está adiantada espera-se que o ângulo de atraso seja um número negativo. O valor de X_C é:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}\tag{10.12}$$

Sendo $\omega = 2\pi f$ (f é a frequência da tensão nos terminais da reatância indutiva) e C é o valor da capacitância. A unidade da reatância capacitiva também é o ohm, representado por Ω , já que há uma divisão entre tensão e corrente. O estudante não deve confundir as unidades de capacitância, que é o farad (F), e da reatância capacitiva, que é o ohm (Ω). Enquanto a capacitância pode representar o efeito capacitivo sob qualquer situação, a reatância capacitiva representa este efeito somente quando tensões e correntes senoidais estão presentes nos circuitos elétricos.

A análise da equação (10.12) evidencia que a reatância capacitiva é inversamente proporcional à frequência angular ω , que é proporcional à frequência f . Desta maneira, se a frequência da fonte de alimentação do circuito é baixa, então a reatância capacitiva será elevada, aumentando a dificuldade de passagem de corrente devido ao efeito capacitivo. No caso extremo da frequência ser zero (fonte de tensão contínua), então a reatância terá teoricamente um valor infinito e nenhuma corrente circulará. Neste caso a reatância capacitiva pode ser representada por um circuito aberto.

Exemplo 10.4. Indutores e capacitores possuem os valores de indutância e capacitância dados a seguir. Calcule os valores de suas reatâncias quando eles são submetidos a sinais com frequência de 60 Hz.

- (a) $C = 5 \text{ mF}$
- (b) $L = 2 \text{ H}$
- (c) $C = 3 \mu\text{F}$
- (d) $L = 6 \text{ mH}$

Solução:

- (a) $X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 5 \times 10^{-3}} = 0,53 \Omega$
- (b) $X_L = 2\pi f L = 2 \times \pi \times 60 \times 2 = 753,98 \Omega$
- (c) $X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 3 \times 10^{-6}} = 884,19 \Omega$
- (d) $X_L = 2\pi f L = 2 \times \pi \times 60 \times 6 \times 10^{-3} = 2,26 \Omega$

□

Exemplo 10.5. Determine quais os valores de indutância e capacitância que quando submetidas a sinais alternados de frequência 60 Hz, apresentam as reatâncias abaixo.

- (a) $X_C = 1,2 \Omega$
- (b) $X_L = 325 \Omega$

(c) $X_C = 232 \, \Omega$

(d) $X_L = 2,15 \, \Omega$

Solução:

(a) $X_C = \frac{1}{2\pi fC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi fX_C} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 1,2} = 0,00221 = 2,21 \times 10^{-3} = 2,21 \, \text{mF}$

(b) $X_L = 2\pi fL \Rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{325}{2 \times \pi \times 60} = 0,86 \, \text{H}$

(c) $X_C = \frac{1}{2\pi fC} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi fX_C} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 232} = 11,4 \, \mu\text{F}$

(d) $X_L = 2\pi fL \Rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{2,15}{2 \times \pi \times 60} = 5,7 \, \text{mH}$

□

Videoaula 10.3 (Reatâncias indutiva e capacitiva). Para mais informações sobre a definição de reatâncias indutiva e capacitiva acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/XX8Rd6SI1BM>



10.4.4 Impedância complexa

O termo *impedância complexa* ou simplesmente *impedância* é utilizado para representar o elemento de circuito que surge da relação entre a tensão e corrente quando os efeitos resistivo, indutivo e capacitivo podem estar presentes simultaneamente. Por exemplo, uma linha de transmissão de potência possui efeito resistivo, pois os condutores não são ideais, indutivo, pois há tensões induzidas nos condutores por causa do campo magnético criado pelas correntes circulantes nos condutores próximos, e capacitivo, pois entre os condutores e a Terra (o planeta Terra mesmo) há criação de cargas induzidas. Obviamente tem-se casos nos quais os efeitos surgem dois a dois: numa linha curta de distribuição geralmente são intensos os efeitos resistivo e indutivo, sendo o capacitivo geralmente desprezado. Equipamentos podem ter características resistiva e capacitiva também, sem apresentar efeito indutivo proeminente. Então a impedância tem como utilidade modelar os efeitos resistivo, indutivo e capacitivo de forma combinada num único elemento. Obviamente uma carga puramente resistiva também é uma impedância, mas é mais adequado referir-se a ela como uma resistência, pois somente um dos três efeitos estará presente. O mesmo pode-se dizer quando há somente o efeito indutivo (melhor

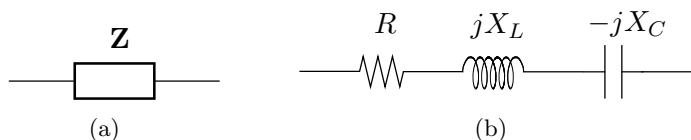


Figura 10.5: Impedância complexa.

representar pela reatância indutiva) e capacitivo (melhor representar pela reatância capacitiva). Mais uma vez é necessário ter em mente que impedância é um conceito válido somente para circuitos CA.

O símbolo utilizado para indicar uma impedância nos circuitos é o retângulo e nas equações é a letra **Z**: ver figura 10.5(a). Nas edições anteriores deste livro a impedância, que é um número complexo, era representada com uma barra acima da letra Z , o que está também de acordo com a nossa notação para número complexo. Porém, para deixar ainda mais claro que há fasores complexos (que são representações no plano complexo que correspondem no domínio do tempo a ondas cossenoidais) e há impedâncias, que não têm correspondente no domínio do tempo, pois é apenas a divisão entre dois números complexos, então a partir da presente edição o negrito **Z** será utilizado para a representação da impedância e Z representará o seu módulo. Se você quiser usar a barra acima ($\bar{Z}$) para indicar a impedância também está certo. Esta última representação é até mais fácil de ser feita num caderno do que a marcação de negrito.

O retângulo, ver novamente a figura 10.5(a), representa a soma dos efeitos de resistências e reatâncias (indutiva e/ou capacitiva). Por exemplo, no caso da impedância representar a associação em série destes elementos pode-se também detalhar os efeitos desenhando os elementos separadamente, como feito na figura 10.5(b).

O valor de uma impedância é:

$$\mathbf{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \quad (10.13)$$

Como a divisão mostrada na equação (10.13) é feita entre os fasores tensão $\bar{U}$ nos terminais da impedância e o fasor corrente $\bar{I}$ que a atravessa, então o valor da impedância é um número complexo que pode ser representado na forma polar (módulo e ângulo) ou retangular (partes real e imaginária). A unidade da impedância é o Ω , pois ela provem da divisão entre os fasores tensão e corrente.

Quando a impedância é representada na forma polar, pode-se ter três possibilidades para o valor do ângulo da impedância, como descritos a seguir:

Impedância puramente resistiva É equivalente a dizer que a impedância possui apenas o efeito resistivo, ou seja, $\mathbf{Z} = R$. Isto pode acontecer em duas situações: a primeira é quando há apenas o efeito resistivo no circuito e a segunda é quando há no mesmo circuito os efeitos resistivo, indutivo e capacitivo, mas estes dois últimos anulam o efeito um do outro ($X_L = X_C$). O diagrama fasorial deve ter a tensão nos terminais da impedância e corrente que a atravessa em fase, como mostrado na figura 10.2(b);

Impedância indutiva Neste caso os efeitos preponderantes são os resistivo e o indutivo e, portanto, a corrente está atrasada em relação à tensão, como mostrado no diagrama fasorial da figura 10.6(a). Note-se que quando o efeito é puramente indutivo o ângulo de atraso da corrente é de 90° , enquanto que no caso do efeito ser resistivo e indutivo o ângulo é menor que 90° e maior que 0° ;

Impedância capacitiva Neste caso os efeitos resistivo e capacitivo preponderam e, portanto, a corrente está adiantada em relação à tensão, como mostrado no diagrama fasorial da figura 10.6(b). Se o efeito fosse puramente capacitivo, então a corrente estaria adiantada em 90° , porém, quando os efeitos resistivo e capacitivo preponderam o ângulo de adiantamento da corrente em relação à tensão é maior que 0° e menor que 90° . Se o ângulo ϕ representa o atraso, então conclui-se que é negativo ($\phi < 0$) para cargas capacitivas (exercite para que este conceito seja aprendido e fixado).

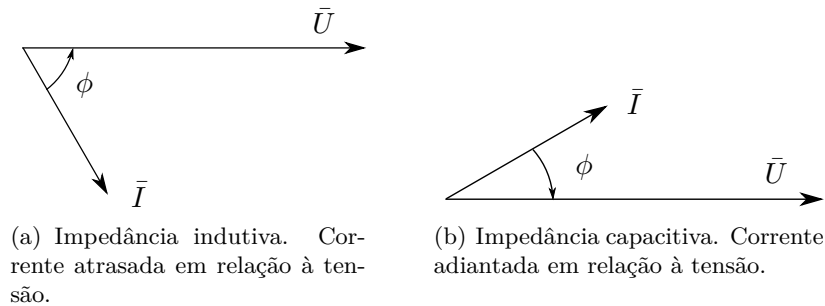


Figura 10.6: Diagramas fasoriais para impedâncias indutivas e capacitivas.

Em um circuito é comum ter-se a associação de resistências com capacitâncias ou indutâncias. Quando a associação possui apenas resistências e reatâncias capacitivas, dizemos que a impedância total possui um *comportamento capacitivo*. Caso a associação possua apenas resistências e reatâncias indutivas, diz-se que a impedância total possui um *comportamento indutivo*. A expressão a seguir permite definir a impedância matematicamente:

$$\mathbf{Z} = R \pm jX \quad (10.14)$$

Na equação (10.14) o $\pm$ é lido como mais ou menos e está presente para frisar que a impedância pode ter efeito indutivo (+) ou capacitivo (-).

A impedância é um número complexo e, portanto, pode ser representado na forma polar, com módulo e ângulo, o que é feito a seguir:

$$\mathbf{Z} = Z \angle \theta_Z \quad (10.15)$$

Neste caso se $\theta_Z > 0$, então a impedância é indutiva enquanto se $\theta_Z < 0$, então a impedância é capacitiva.

Caso no circuito existam as presenças de resistências e reatâncias capacitivas e indutivas, precisa-se determinar a impedância equivalente para saber se ela terá um comportamento capacitivo ou indutivo. Isto ficará mais claro na seção 10.4.5, na qual é esclarecida como se realiza as associações série, paralelo e mista de impedâncias.

Videoaula 10.4 (Impedância complexa). Para mais informações sobre a definição de impedância complexa acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/WP1k9sGB6nM>



10.4.5 Associação de impedâncias

Assim como as resistências, as impedâncias representam uma dificuldade que é imposta para o fluxo da corrente, porém o termo impedância tem sentido somente no caso da alimentação ser em tensão/corrente alternada. Para suas associações, valem as mesmas regras das associações de resistências, mas não se deve esquecer que as impedâncias são números complexos.

Associação série

Considerando inicialmente um caso particular, mostrado no circuito da figura 10.7(a).

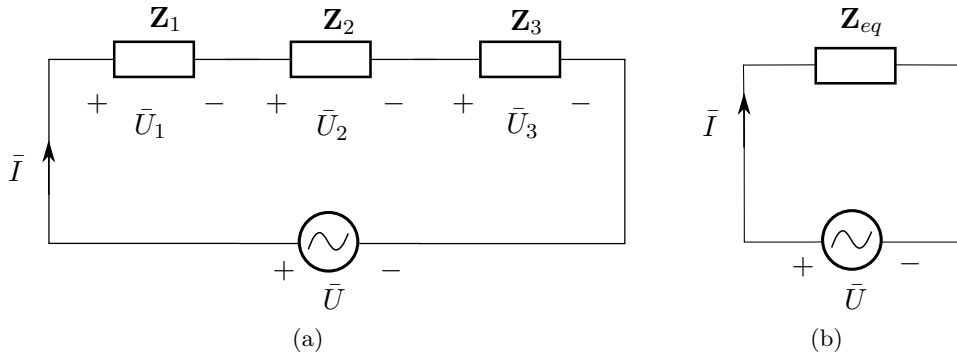


Figura 10.7: Associação de impedâncias em série.

Neste caso, de maneira análoga a associação de resistências, tem-se que:

- A impedância equivalente é dada pela soma das três impedâncias ($\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3$);
- A tensão da fonte é igual a soma das d.d.p. das impedâncias (note que deve ser feita a soma fasorial), ou seja, $\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3$;
- A corrente $\bar{I}$ que atravessa todas as impedâncias é a mesma (lembre-se que ela possui módulo e ângulo, pois é uma grandeza fasorial).

Para n impedâncias ($\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n$) associadas em série, a impedância equivalente da associação, $\mathbf{Z}_{eq}$, é dada por:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_n \quad (10.16)$$

As tensões possuem a seguinte relação:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \dots + \bar{U}_n$$

As correntes elétricas são:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 = \bar{I}_2 = \dots = \bar{I}_n$$

Na figura 10.8 tem-se um circuito RLC série. Neste tipo de circuito há associação em série de uma resistência R , uma capacitância C e uma indutância L conectadas a uma fonte de tensão alternada senoidal de frequência f . Nesta associação, tem-se que a impedância equivalente é dada por:

$$\mathbf{Z}_{eq} = R + (-jX_C) + (jX_L)$$

Lembrando que:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad \text{e} \quad X_L = 2\pi fL$$

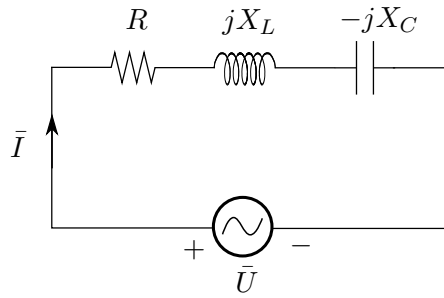


Figura 10.8: Circuito RLC série.

Exemplo 10.6. Determine a impedância equivalente de um circuito RLC série, cuja frequência da fonte é de 60 Hz e que possui parâmetros com os seguintes valores: $R = 5 \Omega$, $C = 1 \text{ mF}$ e $L = 20 \text{ mH}$.

Solução:

Num circuito RLC série tem-se que:

$$\mathbf{Z}_{eq} = R + (-jX_C) + (jX_L)$$

Lembrando que:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times (1 \times 10^{-3})} = 2,65 \Omega$$

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times \pi \times 60 \times (20 \times 10^{-3}) = 7,54 \Omega$$

Logo:

$$\mathbf{Z}_{eq} = 5 + (-j2,65) + j7,54 = 5 + j4,89 \Omega = 6,99 \angle 44,36^\circ \Omega$$

□

Associação paralelo

Pode-se iniciar considerando o caso particular mostrado na figura 10.9(a).

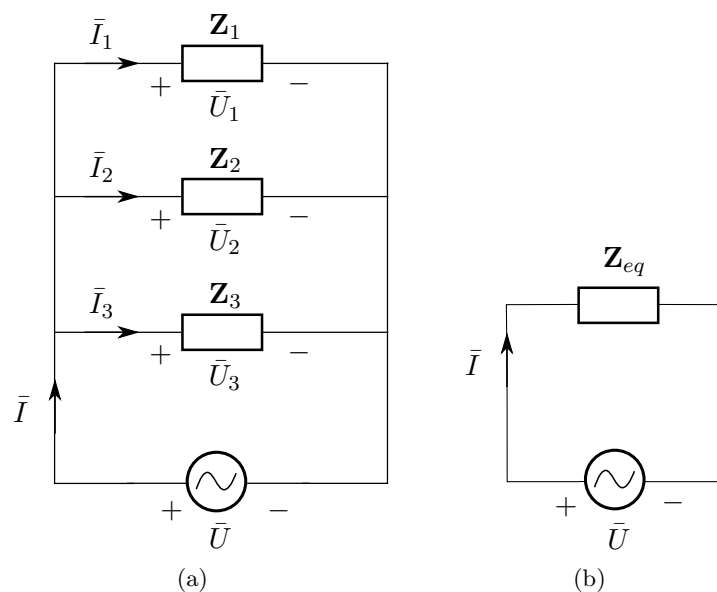


Figura 10.9: Associação de impedâncias em paralelo.

Realizando procedimentos de maneira análoga a associação em paralelo de resistências, tem-se que:

- O inverso da impedância equivalente é dado pela soma dos inversos das impedâncias, ou seja, $1/\mathbf{Z}_{eq} = 1/\mathbf{Z}_1 + 1/\mathbf{Z}_2 + 1/\mathbf{Z}_3$;
- A tensão da fonte de tensão é a mesma das impedâncias em paralelo ($\bar{U} = \bar{U}_1 = \bar{U}_2 = \bar{U}_3$);
- A corrente $\bar{I}$ divide-se entre as três impedâncias, ou seja, $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$.

Para n impedâncias ($\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots, \mathbf{Z}_n$) associadas em paralelo ($\mathbf{Z}_1 // \mathbf{Z}_2 // \dots // \mathbf{Z}_n$), a impedância equivalente da associação, $\mathbf{Z}_{eq}$, é dada por:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\mathbf{Z}_n} \quad (10.17)$$

A relação entre as tensões é:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 = \bar{U}_2 = \dots = \bar{U}_n$$

A relação entre as correntes elétricas é:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n$$

Há dois casos particulares na associação de impedâncias em paralelo que são merecedores de destaque, são eles:

1. Associação de apenas duas impedâncias ($\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$) em paralelo. Neste caso $\mathbf{Z}_{eq}$ é dada por:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}_1 \times \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \quad (10.18)$$

2. Associação em paralelo de N impedâncias idênticas de valor $\mathbf{Z}$. Neste caso $\mathbf{Z}_{eq}$ é dada por:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{\mathbf{Z}}{N} \quad (10.19)$$

Na figura 10.10 há um circuito RLC paralelo. Neste tipo de circuito tem-se a associação em paralelo de uma resistência R , uma capacitância C e uma indutância L conectadas a uma fonte de tensão alternada senoidal de frequência f . Nesta associação, a impedância equivalente é dada por:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(-jX_C)} + \frac{1}{jX_L}$$

Lembrando que:

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad \text{e} \quad X_L = 2\pi fL$$

O exemplo a seguir utiliza os conceitos previamente tratados.

Exemplo 10.7. Determine a impedância equivalente de um circuito RLC paralelo cuja frequência da fonte é de 60 Hz. Os valores dos parâmetros são: $R = 5 \Omega$, $C = 30 \text{ mF}$ e $L = 20 \text{ mH}$.

Solução:

Num circuito RLC paralelo tem-se que:

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(-jX_C)} + \frac{1}{jX_L}$$

Lembrando que:

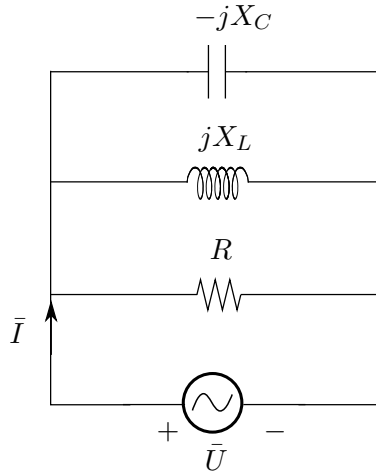


Figura 10.10: Circuito RLC paralelo.

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times (30 \times 10^{-3})} = 2,65 \, \Omega$$

$$X_L = 2\pi fL = 2 \times \pi \times 60 \times (20 \times 10^{-3}) = 7,54 \, \Omega$$

Então:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(-jX_C)} + \frac{1}{jX_L} = \frac{1}{5} + \frac{1}{-j2,65} + \frac{1}{j7,54} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2,65 \angle -90^\circ} + \frac{1}{7,54 \angle 90^\circ}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = 0,2 + 0,38 \angle 90^\circ + 0,13 \angle -90^\circ = 0,2 + j0,38 + (-j0,13) = 0,2 + j0,25$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = 0,2 + j0,25 \Rightarrow Z_{eq} = \frac{1}{0,2 + j0,25} = \frac{1}{0,32 \angle 51,34^\circ} = 3,13 \angle -51,34^\circ \, \Omega$$

Sendo assim:

$$Z_{eq} = 3,13 \angle -51,34^\circ \, \Omega = 1,96 - j2,44 \, \Omega$$

□

Associação mista

Para circuitos mistos, com impedâncias associadas em série e paralelo, pode-se fazer a redução do circuito através do cálculo da impedância equivalente. Primeiro calcula-se a impedância equivalente daquelas que estiverem associadas em série e depois a impedância equivalente daquelas que estiverem em paralelo. O procedimento é repetido até que se consiga determinar a impedância equivalente única de todo o circuito.

Exemplo 10.8. Na figura 10.11 tem-se um circuito misto que contém impedâncias em série e em paralelo. Determine a impedância equivalente para este circuito.

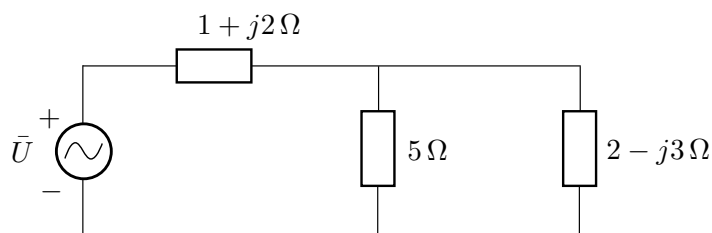


Figura 10.11: Circuito misto.

Solução:

Seguindo o procedimento, primeiramente verifica-se se há impedâncias em série. No caso não há nenhuma. Então procura-se se há associações em paralelo. Nota-se que as impedâncias de 5Ω e $2 - j3\Omega$ estão em paralelo, então a associação delas resulta em $\mathbf{Z}'_{eq}$, cujo valor é:

$$\mathbf{Z}'_{eq} = \frac{5 \times (2 - j3)}{5 + (2 - j3)}$$

$$\mathbf{Z}'_{eq} = \frac{10 - j15}{7 - j3}$$

$$\mathbf{Z}'_{eq} = \frac{18,03 \angle -56,31^\circ}{7,62 \angle -23,2^\circ}$$

$$\mathbf{Z}'_{eq} = 2,34 \angle -33,11^\circ \Omega$$

A impedância equivalente de todo circuito $\mathbf{Z}_{eq}$ é dada pela soma de $\mathbf{Z}'_{eq} = 2,34 \angle -33,11^\circ \Omega$ e $1 + j2$, pois elas estão em série. Realizando as operações, tem-se:

$$\mathbf{Z}_{eq} = 2,34 \angle -33,11^\circ + (1 + j2)$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = 2,34 \cos(-33,11) + j2,34 \sin(-33,11) + (1 + j2)$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = (1,96 - j1,28) + (1 + j2)$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = (1,96 + 1) + j(-1,28 + 2)$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = 2,96 + j0,72 \Omega$$

□

Videoaula 10.5 (Associação de impedâncias). Para mais informações sobre as técnicas para encontrar a impedância equivalente de circuitos série, paralelo ou misto acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/mbvnR7yhZfY>



10.5 Frequência de ressonância

Em um parquinho infantil vê-se os pais empurrando uma criança no balanço e após o movimento ter amplitude é desnecessário que se aplique muita força para manter o vai e vem: basta empurrar quando a criança estiver já se deslocando para frente. Caso se empurre quando a criança ainda estiver vindo em direção aos pais ela será freada. Ao se empurrar na mesma frequência do movimento (sempre no mesmo instante e de forma que seja dado mais impulso) pode-se dizer que a frequência da fonte (força dos pais) é a mesma do sistema (criança no balanço): está ocorrendo o fenômeno de ressonância. Coisa similar pode ocorrer em circuitos elétricos.

Quando, em um circuito com tensões e correntes alternadas senoidais, os efeitos capacitivo e indutivo se anulam diz-se que o circuito encontra-se em *ressonância*. Isto ocorrerá para uma frequência específica, que faz com que a fonte de tensão ou de corrente, aumente a potência fornecida ao elemento resistivo do sistema. O fenômeno ocorrerá na *frequência de ressonância* f_{re} .

Considerando o caso particular de um circuito RLC série, como o da figura 10.8, a ressonância ocorrerá quando as reatâncias indutiva e capacitiva forem iguais, de tal forma que o circuito tenha apenas o elemento resistivo. Saliente-se que a seguir será utilizado o subscrito eq para indicar capacitância e indutância equivalentes, pois na prática pode-se ter mais elementos que após a associação se torne um circuito série conforme mostrado na referida figura. Então pode-se escrever:

$$X_{Ceq} = X_{Leq}$$

$$\frac{1}{2\pi f_{re} C_{eq}} = 2\pi f_{re} L_{eq} \quad (10.20)$$

Isolando f_{re} na equação (10.20), tem-se que:

$$f_{re} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_{eq} C_{eq}}} \quad (10.21)$$

Exemplo 10.9. Determine o valor da frequência de ressonância para um circuito que possui um resistor de 5Ω , um indutor de 5 mH e um capacitor de 3 mF , todos associados em série a uma fonte de tensão de 50 V cuja frequência pode ser manualmente ajustada.

Solução:

Empregando a equação (10.21):

$$f_{re} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_{eq} C_{eq}}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{(5 \times 10^{-3}) \times (3 \times 10^{-3})}} = 41,09\text{ Hz}$$

□

A anulação do efeito indutivo ou capacitivo em um circuito pode ser utilizado propositalmente para construção de equipamentos ou pode ser um problema não previsto que causará acidentes devido ao aumento excessivo no valor da corrente circulante. Este segundo caso fica evidente no exemplo 10.10.

Exemplo 10.10. Calcule a corrente da carga $\mathbf{Z}_c$ (cujo valor da resistência é 3Ω e da indutância é 6 mH) nas seguintes situações:

- Caso a carga seja alimentada pelos seus terminais por uma fonte de tensão de valor eficaz de tensão de 127 V e frequência de 60 Hz ;
- Caso seja adicionada um capacitor de capacitância 4 mF em série com a carga, mantendo o valor da d.d.p. da fonte de tensão e frequência do item anterior;
- Caso seja adicionado o mesmo capacitor do item anterior em série com a carga e seja mantido o valor da d.d.p. da fonte de tensão, alterando somente a frequência da fonte de tensão, que é a de ressonância.

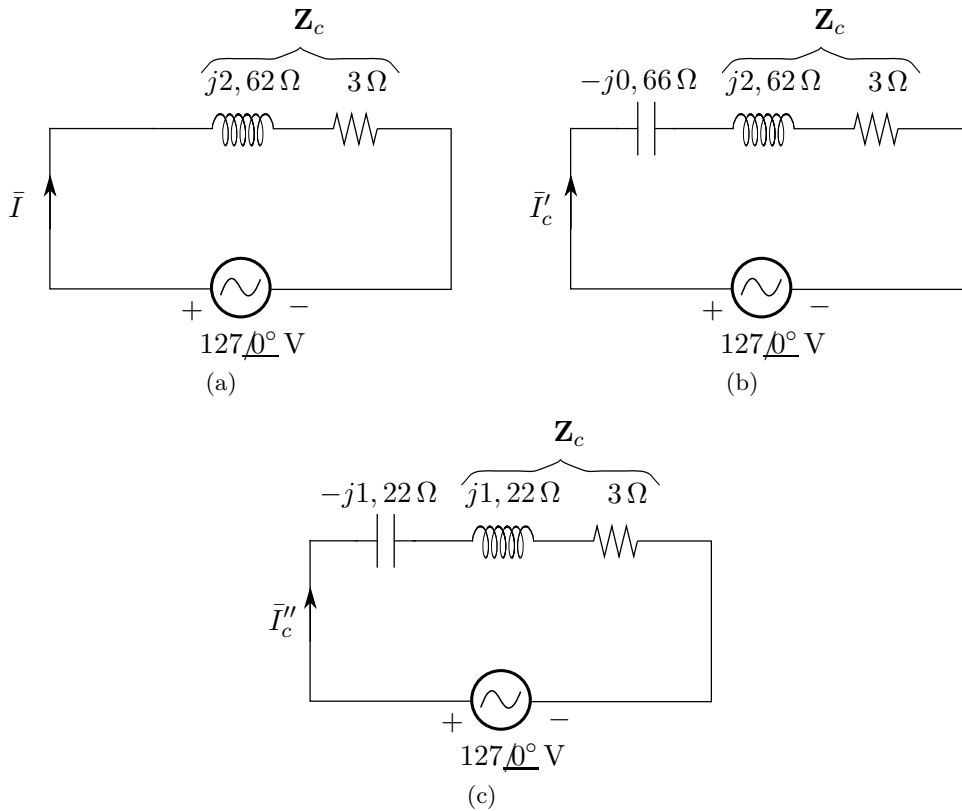


Figura 10.12: Circuitos elétricos referentes ao exemplo 10.10.

Solução:

(a) Neste caso a reatância indutiva vale:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \times \pi \times 60 \times 6 \times 10^{-3} = 2,62 \Omega$$

O circuito que representa esta situação é mostrado na figura 10.12(a). A corrente $\bar{I}_c$ é:

$$\bar{I}_c = \frac{127\angle 0^\circ}{3 + j2,62} = 24,02 - j20,97 \text{ A} = 32,88\angle -41,13^\circ \text{ A}$$

(b) Neste caso é adicionada uma reatância capacitiva, cujo valor é:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 4 \times 10^{-3}} = 0,66 \Omega$$

O circuito que representa esta situação é mostrado na figura 10.12(b). A corrente $\bar{I}'_c$ é:

$$\bar{I}'_c = \frac{127\angle 0^\circ}{3 + j2,62 - j0,66} = 29,67 - j19,38 \text{ A} = 35,44\angle -33,16^\circ \text{ A}$$

(c) Precisa-se calcular a frequência de ressonância deste circuito, já que o enunciado diz que é nesta frequência que a fonte opera. Ela é dada por:

$$f_{re} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{eq}C_{eq}}} = \frac{1}{2 \times \pi \times \sqrt{(6 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-3})}} = 32,49 \text{ Hz}$$

Com este novo valor de frequência os valores das reatâncias indutiva e capacitiva serão:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2 \times \pi \times 32,49 \times 6 \times 10^{-3} = 1,22 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \times \pi \times 32,49 \times 4 \times 10^{-3}} = 1,22 \Omega$$

O circuito que representa esta situação é mostrado na figura 10.12(c). O valores idênticos em módulo das reatâncias indutiva e capacitiva era esperado, já que o conceito de frequência de ressonância diz que elas devem ser iguais. A corrente $\bar{I}_c''$ é:

$$\bar{I}_c'' = \frac{127\angle 0^\circ}{3 + j1,22 - j1,22} = \frac{127\angle 0^\circ}{3} = 42,33\angle 0^\circ \text{ A}$$

Nota-se que o valor da corrente na frequência de ressonância é o maior dos três casos, pois nesta situação somente a resistência se opõe à passagem de corrente, já que os efeitos indutivo e capacitivo anularam um ao outro (na frequência de ressonância). Se este efeito é anulado acidentalmente, o valor da corrente pode se elevar a ponto de causar danos ao dispositivo consumidor de eletricidade (carga) ou a fonte de tensão, já que em equipamentos reais esta também tem limites para fornecer potência sem se danificar devido ao sobreaquecimento.

□

Videoaula 10.6 (Frequência de ressonância). Para mais detalhes sobre o fenômeno de ressonância em circuitos CA acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/lJDUZltcDyY>



10.6 Divisores de tensão e de corrente

Na seção 3.5, que deve ser revisada pelo estudante, estão descritas diferentes formas de se utilizar as expressões de divisores de tensão e de corrente, quando a alimentação do circuito é feita por uma fonte de tensão contínua. Na presente seção os divisores de tensão e de corrente são utilizados para cálculos em circuitos elétricos cuja alimentação é feita com tensão senoidal. As expressões de divisores de tensão e de corrente utilizadas na presente seção são apresentadas e em seguida sua aplicação é mostrada através de exemplos. A dedução das expressões é similar àquelas feitas na seção 3.5 diferenciando o fato de que devem ser empregados números complexos para representar as tensões, correntes elétricas e impedâncias já que agora trata-se de um circuito cujas tensões e correntes elétricas variam senoidalmente no tempo. Vale a pena ressaltar que o conceito de divisor de tensão é um conceito empregado para associações de impedâncias em série, enquanto que o conceito de divisor de corrente é um conceito empregado para associações de impedâncias em paralelo.

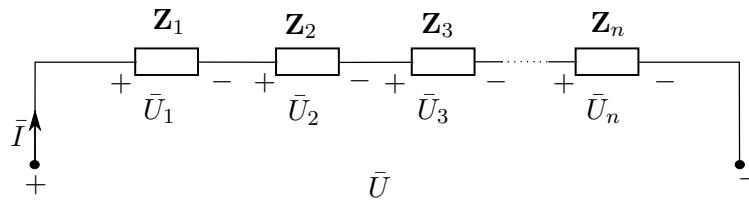


Figura 10.13: Circuito elétrico para análise do divisor de tensão.

10.6.1 Divisor de tensão

Considere um circuito, como mostrado na figura 10.13, com n impedâncias associadas em série. O valor da d.d.p. nos terminais da n -ésima impedância é:

$$\bar{U}_n = \frac{\mathbf{Z}_n}{\mathbf{Z}_{eq}} \bar{U} \quad (10.22)$$

O estudante deve notar que a equação (10.22) permite que o valor da tensão nos terminais de qualquer impedância da associação série seja calculada sem o conhecimento da corrente que a atravessa (no caso $\bar{I}$), desde que a tensão nos terminais da associação ($\bar{U}$) seja conhecida.

Divisor de tensão com duas impedâncias em série

Um dos casos mais comuns de uso do divisor de tensão é para uma associação série de apenas duas impedâncias. Neste caso, usando a equação (10.22), a d.d.p. nos terminais de $\mathbf{Z}_1$ é:

$$\bar{U}_1 = \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \right) \bar{U} \quad (10.23)$$

Nos terminais da impedância $\mathbf{Z}_2$ a d.d.p. vale:

$$\bar{U}_2 = \left(\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \right) \bar{U} \quad (10.24)$$

Exemplo 10.11. Calcule o valor da d.d.p. nos terminais da impedância de $15 + j5 \Omega$ do circuito da figura 10.14.

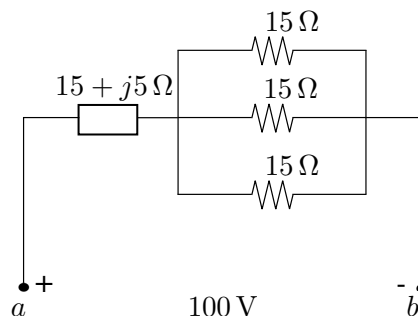


Figura 10.14: Circuito elétrico relativo ao exemplo 10.11.

Solução:

O conceito de divisor de tensão aplica-se apenas quando há impedâncias em série e é conhecida a d.d.p. nos terminais de toda a associação. Se é encontrado o valor de $15 \Omega // 15 \Omega // 15 \Omega$ (que resulta

no valor 5Ω), então tem-se duas impedâncias em série (a de $15 + j5\Omega$ e a de 5Ω). Pode-se então usar a equação (10.23) e assim encontra-se:

$$\bar{U}_{15+j5\Omega} = \left[\frac{15 + j5}{(15 + j5) + 5} \right] 100 = 90,91 \text{ V}$$

Fazendo os cálculos encontra-se que a tensão nos terminais da impedância de $15 + j5\Omega$ é:

$$\bar{U}_{15+j5\Omega} = 76,47 + j5,88 \text{ V} = 76,7 \angle 4,4^\circ \text{ V}$$

□

10.6.2 Divisor de corrente

Considere o circuito da figura 10.15 que possui n impedâncias associadas em paralelo. O valor da corrente que atravessa cada uma das impedâncias pode ser calculada se são conhecidos os valores da corrente $\bar{I}$ (identificada na figura 10.15) e de todas as impedâncias da associação em paralelo. Desta maneira o valor da corrente da n -ésima impedância pode ser calculado usando a expressão:

$$\bar{I}_n = \frac{\mathbf{Z}_{eq}}{\mathbf{Z}_n} \bar{I} \quad (10.25)$$

O estudante deve notar que a equação (10.25) permite que o cálculo do valor da corrente de cada impedância seja calculado sem se conhecer o valor da tensão nos terminais da impedância.

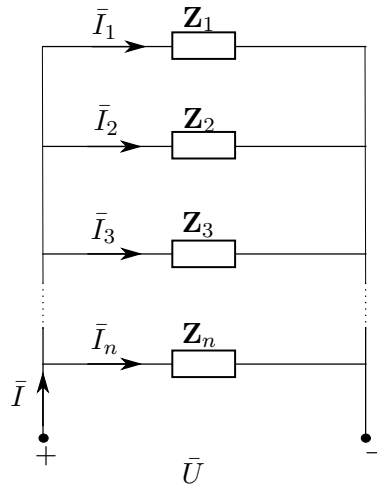


Figura 10.15: Circuito elétrico para análise do divisor de corrente.

Divisor de corrente com duas impedâncias em paralelo

No caso particular de duas impedâncias associadas em paralelo, o valor da corrente que atravessa cada uma delas é:

$$\bar{I}_1 = \left(\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \right) \bar{I} \quad (10.26)$$

Ainda usando a equação (3.23), o valor de I_2 é:

$$\bar{I}_2 = \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \right) \bar{I} \quad (10.27)$$

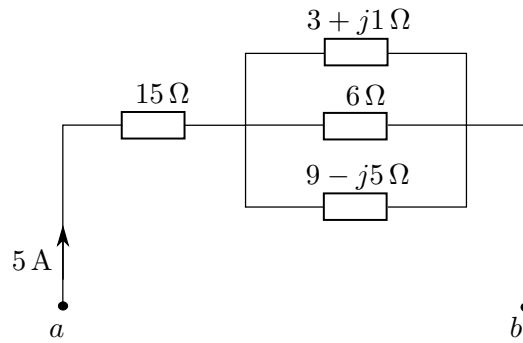


Figura 10.16: Circuito elétrico relativo ao exemplo 10.12.

Exemplo 10.12. Calcule a intensidade da corrente que atravessa a impedância de $3 + j1 \Omega$ do circuito da figura 10.16.

Solução:

Deve-se notar que o divisor de corrente aplica-se apenas quando há impedâncias em paralelo e é conhecido o valor da corrente, que se dividirá pelas impedâncias da associação. Assim sendo, no presente exemplo, o divisor será empregado sem considerar o valor da resistência de 15Ω no cálculo do $\mathbf{Z}_{eq}$. Usado na expressão do divisor de corrente da equação (10.25), que é repetida a seguir por conveniência:

$$\bar{I}_n = \frac{\mathbf{Z}_{eq}}{\mathbf{Z}_n} \bar{I}$$

Para calcular a corrente que atravessa a impedância de $3 + j1 \Omega$ é necessário calcular $\mathbf{Z}_{eq}$ (lembrar que neste caso não é o $\mathbf{Z}_{eq}$ entre os terminais a e b ; é o $\mathbf{Z}_{eq}$ da associação em paralelo, no qual se deseja aplicar a expressão de divisor de corrente), que neste caso é:

$$\mathbf{Z}_{eq} = (3 + j1)\Omega // 6\Omega // (9 - j5)\Omega = 1,8 + j0,17 \Omega$$

Empregando a expressão de divisor de corrente que atravessa a impedância de $3 + j1 \Omega$, pode ser calculado como:

$$\bar{I}_{3+j1\Omega} = \left(\frac{1,8 + j0,17}{3 + j1} \right) 5$$

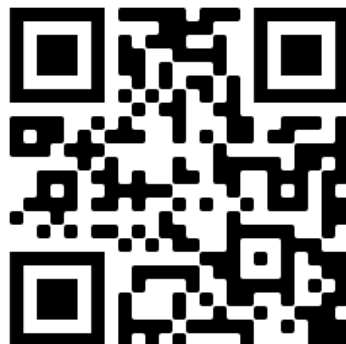
Portanto, o valor de $\bar{I}_{3+j1\Omega}$ é:

$$\bar{I}_{3+j1\Omega} = 2,79 - j0,65 \text{ A} \approx 2,86 \angle -13^\circ \text{ A}$$

□

Videoaula 10.7 (Divisores de tensão e de corrente). Para ver o uso das equações de divisores de tensão e corrente em circuitos CA acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/SKdYP8UpIHs>



10.6.3 Admitância Complexa

O elemento de circuito *admitância complexa* ou simplesmente *admitância* é definido como o inverso da impedância e é representado pela letra **Y**. Pode representar no seu caderno como $\bar{Y}$, se desejar; esta também é uma notação utilizada para um número complexo. Só um lembrete: $\bar{U}$ e $\bar{I}$ são fasores que possuem uma função cossenoidal correspondente no domínio do tempo, enquanto que a admitância é somente a divisão entre os dois números complexos ($\bar{I}/\bar{U}$) e o resultado não é um fasor, por isto a notação escolhida foi o negrito **Y** para enfatizar esta diferença, mas em edições anteriores do presente livro o $\bar{Y}$ era utilizado e isto não é um problema, pode usar também. Matematicamente escreve-se:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \quad (10.28)$$

Enquanto uma impedância elevada indica grande dificuldade para a passagem de corrente, uma admitância elevada indica uma grande facilidade à passagem de corrente. Feita a inversão de **Z**, será encontrado um número complexo, assim pode-se escrever que a admitância é:

$$\mathbf{Y} = G \pm jB \quad (10.29)$$

A unidade de admitância é o siemens, ou simplesmente S (respeite o maiúsculo, pois a mesma letra minúscula indica tempo em segundos!). A parte real da admitância, G , é chamada de *condutância* e a parte imaginária, B , é chamada de *susceptância*. Na equação 10.29 o $\pm$ indica o mais ou menos, sendo que se for $+$ a susceptância representa o efeito capacitivo e se for $-$ representa o efeito indutivo: a análise do sinal resulta em resultados opostos ao da impedância, mas isto já era esperado.

O estudante deve observar que os termos G e B são encontrados pela inversão da impedância complexa e não pela inversão individual da resistência ou reatância, respectivamente.

Em alguns cálculos pode ser necessário utilizar a representação polar e a transformação será feita da mesma forma que o estudante já conhece:

$$\mathbf{Y} = Y \angle \theta_Y \quad (10.30)$$

Note-se que se $\theta_Y > 0$ está se representado um efeito capacitivo e se $\theta_Y < 0$ o efeito representado é indutivo. Como esperado, é o caso oposto à análise do ângulo da impedância.

Exemplo 10.13. Determine a admitância complexa das impedâncias a seguir:

(a) $5 + j2\Omega$

(b) $3 - j4\Omega$

Solução:

Para se determinar a admitância complexa deve-se inverter a impedância complexa.

(a)

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \frac{1}{5 + j2} \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{5,38\angle 21,8^\circ} \\ \mathbf{Y} &= 0,189\angle -21,8^\circ \\ \mathbf{Y} &= 0,189 \cos(-21,8^\circ) + j0,189 \sin(-21,8^\circ) \\ \mathbf{Y} &= 0,17 - j0,07 \text{ S} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \frac{1}{3 - j4} \\ \mathbf{Y} &= \frac{1}{5\angle -53,13^\circ} \\ \mathbf{Y} &= 0,2\angle 53,13^\circ \\ \mathbf{Y} &= 0,2 \cos(53,13^\circ) + j0,2 \sin(53,13^\circ) \\ \mathbf{Y} &= 0,12 + j0,16 \text{ S} \end{aligned}$$

A resposta poderia ser deixada na representação polar, pois nenhum formato foi especificado, mas a transformação foi realizada apenas para exercitar a transformação polar→retangular.

□

Videoaula 10.8 (Admitância complexa). Para mais informações sobre a definição de admitância complexa acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/CwluRRzZn2s>



A admitância é utilizada com frequência em poucas áreas e ainda assim, em assuntos mais avançados de engenharia elétrica. Para um curso de formação técnica pode ser o suficiente saber a sua definição. Mas pode ser necessário realizar a associação delas, então, se isto for relevante na sua formação, siga adiante.

10.6.4 Associação de admitâncias

Se encontrar a impedância equivalente de um circuito CA não é mais um problema para você, então a admitância equivalente também não será, pois as operações para associações série e paralelo são inversas ao caso da impedância, como é mostrado nas seções que seguem.

Associação série

O circuito da figura 10.17(a) mostra apenas três admitâncias, mas as conclusões são válidas para um número qualquer delas em série. Para apresentar o tema de forma mais rápida, somente os casos mais gerais serão tratados.

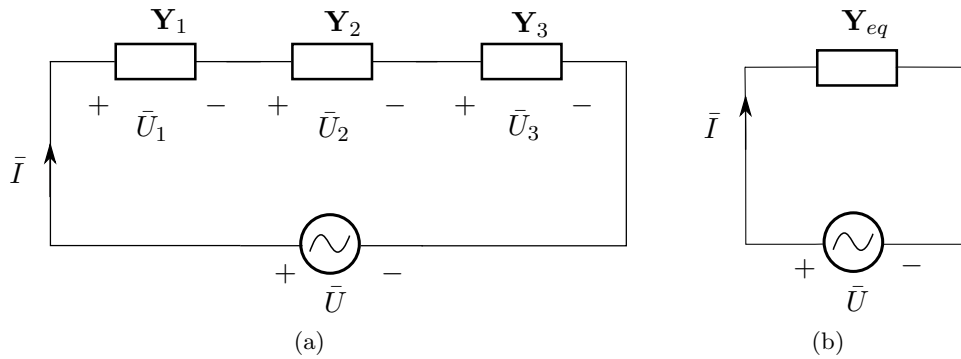


Figura 10.17: Associação de admitâncias em série.

Admitância equivalente de um conjunto associado em série pode ser calculada pela expressão a seguir:

$$\frac{1}{\mathbf{Y}_{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1} + \frac{1}{\mathbf{Y}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{Y}_n} \quad (10.31)$$

Há dois casos particulares na associação de admitâncias em série que são merecedores de destaque, são eles:

1. Associação de apenas duas admitâncias ($\mathbf{Y}_1$ e $\mathbf{Y}_2$) em série. Neste caso $\mathbf{Y}_{eq}$ é dada por:

$$\mathbf{Y}_{eq} = \frac{\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} \quad (10.32)$$

2. Associação em série de N admitâncias idênticas de valor $\mathbf{Y}$. Neste caso $\mathbf{Y}_{eq}$ é dada por:

$$\mathbf{Y}_{eq} = \frac{\mathbf{Y}}{N} \quad (10.33)$$

Associação paralelo

O circuito da figura 10.18(a) mostra apenas três admitâncias, mas já serão apresentadas as equações para uma quantidade qualquer delas, já que o entendimento de associação de impedâncias nos dá esse atalho.

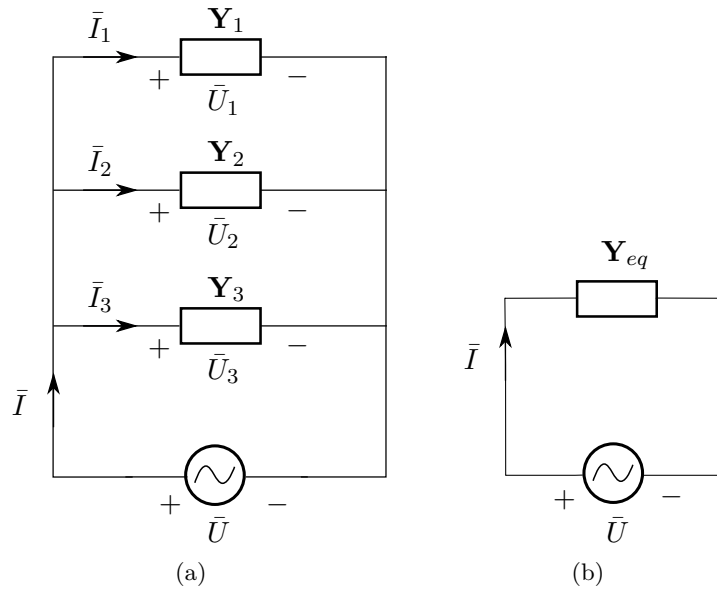


Figura 10.18: Associação de admitâncias em paralelo.

Para n admitâncias ($\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$) associadas em paralelo, a admitância equivalente da associação, $\mathbf{Y}_{eq}$, é dada por:

$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \dots + \mathbf{Y}_n \quad (10.34)$$

Associação mista

Para circuitos mistos, com admitâncias associadas em série e paralelo, pode-se fazer a redução do circuito da mesma forma já apresentada no presente livro: primeiro calcula-se a admitância equivalente daquelas que estiverem associadas em série e depois a admitância equivalente daquelas que estiverem em paralelo. O procedimento é repetido até que se consiga determinar a admitância equivalente única de todo o circuito.

Exemplo 10.14. Na figura 10.19 tem-se um circuito misto que contém admitâncias em série e em paralelo. Determine a admitância equivalente para este circuito.

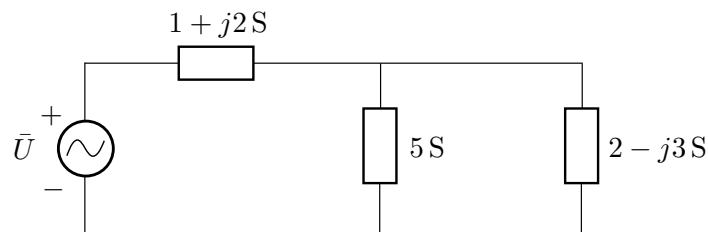


Figura 10.19: Circuito misto.

Solução:

Seguindo o procedimento, primeiramente verifica-se se há admitâncias em série: não há! Procura-se então se há associações em paralelo e isto ocorre com 5 S e $2 - j3 \text{ S}$. A associação em paralelo delas

resulta em $\mathbf{Y}'_{eq}$, cujo valor é:

$$\mathbf{Y}'_{eq} = (5) + (2 - j3)$$

$$\mathbf{Y}'_{eq} = (5 + 2) - j3$$

$$\mathbf{Y}'_{eq} = 7 - j3 \text{ S}$$

Agora associasse $\mathbf{Y}'_{eq}$ em série com $1 + j2 \text{ S}$, como feito na sequência:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{eq} &= \frac{(7 - j3) \times (1 + j2)}{(7 - j3) + (1 + j2)} \\ \mathbf{Y}_{eq} &= \frac{7,62 \angle -23,2^\circ \times 2,24 \angle 63,4^\circ}{(7 + 1) + j(-3 + 2)} \\ \mathbf{Y}_{eq} &= \frac{17,07 \angle 40,2^\circ}{8 - j} \\ \mathbf{Y}_{eq} &= \frac{17,07 \angle 40,2^\circ}{8,06 \angle -7,1^\circ} \\ \mathbf{Y}_{eq} &= 2,12 \angle 47,3^\circ \text{ S}\end{aligned}$$

Nenhum formato de resposta foi especificado, mas é muito comum também que se use a representação retangular: $\mathbf{Y}_{eq} = 1,44 + j1,56 \text{ S}$.

□

10.7 Resumo do capítulo

As impedâncias representam as características resistiva, indutiva ou capacitiva e também a associação destes vários efeitos juntos. Para entendimento dos circuitos com impedâncias o estudante teve de aprender sobre vários conceitos, que são resumidos a seguir:

- O valor eficaz de uma onda de tensão senoidal é igual ao valor de pico da onda dividido por raiz de dois ($U_{ef} = U_P/\sqrt{2}$). O mesmo vale para a onda de corrente;
- O valor eficaz, U_{ef} ou I_{ef} , é o valor contínuo equivalente que faria um dispositivo consumir a mesma potência que o valor da onda senoidal com valores de pico $\sqrt{2}U_{ef}$ ou $\sqrt{2}I_{ef}$;
- O fasor complexo girante é uma forma de representar um sinal senoidal/cossenoidal de tensão ou de corrente. O fasor pode ser representado na forma polar (módulo, que é o valor eficaz, e ângulo) ou retangular (partes real e imaginária);
- O quociente entre os fasores tensão e corrente resulta no valor da impedância ($\mathbf{Z} = \bar{U}/\bar{I}$);
- Se a impedância é puramente resistiva, então o ângulo entre a tensão e a corrente é nulo; se é puramente indutiva, então o ângulo da corrente está 90° atrasado em relação à tensão; se é puramente capacitiva, então o ângulo da corrente está 90° adiantado;
- Se a carga é indutiva, ou seja, possui os efeitos indutivo e resistivo, então o ângulo da corrente será atrasado da tensão ($0^\circ < \phi < 90^\circ$). Se a carga é capacitiva, ou seja, possui os efeitos capacitivo e resistivo, então o ângulo da corrente será adiantado da tensão ($-90^\circ < \phi < 0^\circ$);
- A admitância é o inverso da impedância $\mathbf{Y} = \bar{I}/\bar{U} = 1/\mathbf{Z}$;
- A frequência de ressonância em um circuito elétrico é aquela na qual os efeitos indutivo e capacitivo se anulam.

Problemas propostos

Obs.: quando for dito o valor de uma tensão ou corrente nos problemas a seguir deve-se considerar que é o valor eficaz, a não ser que dito explicitamente diferente.

Problema 10.1. Um circuito RLC série é alimentado por uma fonte de tensão de 127 V de magnitude, mas de frequência ajustável. Sabendo-se que $R = 5\ \Omega$, $C = 3\ \mu\text{F}$ e $L = 10\text{ mH}$, determine:

- O valor de frequência para o qual a fonte fornece o máximo valor de corrente para o circuito;
- O máximo valor de corrente que a fonte pode fornecer a este circuito;
- A corrente fornecida pela fonte de tensão quando este circuito é alimentado em uma frequência de 60 Hz ;
- Represente fasorialmente a tensão da fonte e a corrente do item anterior.

Problema 10.2. Um circuito RLC paralelo é alimentado por uma fonte de tensão de 220 V e 60 Hz . Sabendo-se que $R = 3\ \Omega$, $C = 5\text{ mF}$ e $L = 2\text{ mH}$, determine:

- A impedância equivalente do circuito;
- A intensidade da corrente fornecida pela fonte;
- Represente fasorialmente a tensão da fonte e a corrente fornecida pela mesma.

Problema 10.3. Calcular o valor da impedância equivalente dos circuitos elétricos representados nas figuras 10.20(a) e 10.20(b), sabendo que a representação do circuito já está feita levando em consideração que a fonte de tensão é de uma frequência de 400 Hz .

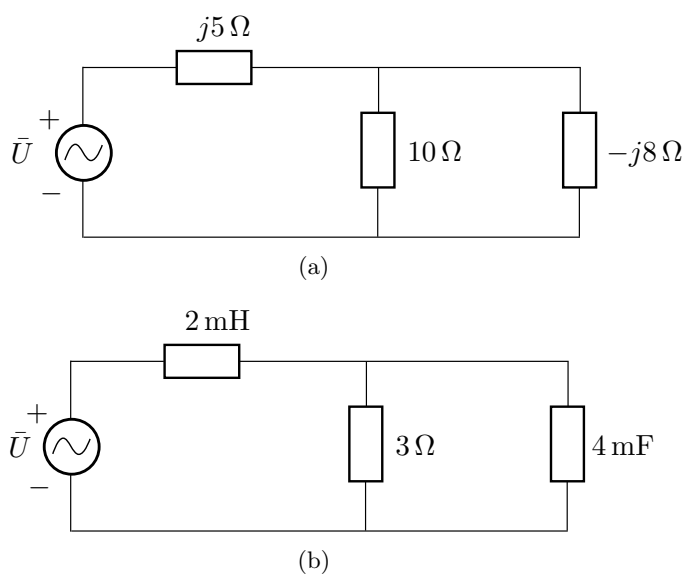


Figura 10.20: Circuitos elétricos relativos ao problema 10.3.

Problema 10.4. Para os circuitos representados na questão anterior, represente fasorialmente a tensão da fonte e a corrente fornecida pela mesma quando:

- A tensão da fonte for $200\angle 0^\circ\text{ V}$;
- A tensão da fonte for $120\angle 30^\circ\text{ V}$.

Problema 10.5. Calcule o valor da impedância equivalente vista dos terminais a e b dos circuitos elétricos mostrados na figura 10.21.

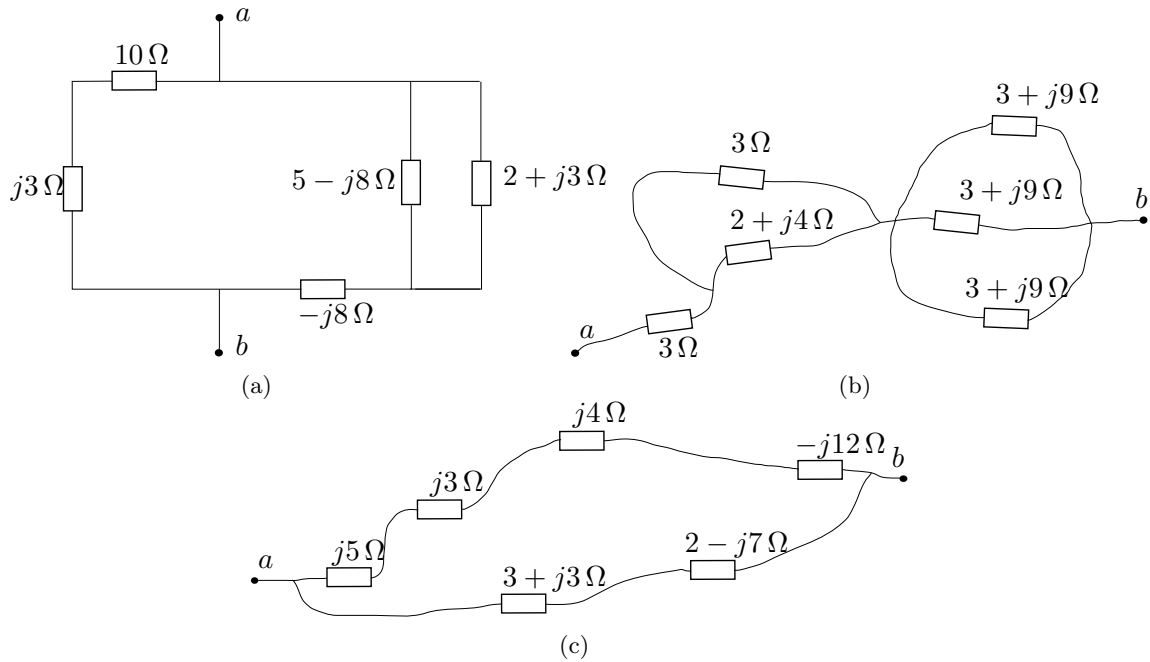


Figura 10.21: Circuitos elétricos relativos ao problema 10.5.

Problema 10.6. Calcule o valor da admitância equivalente dos circuitos elétricos mostrados na figura 10.22 vista pelos terminais da fonte de tensão ou dos pontos a e b indicados.

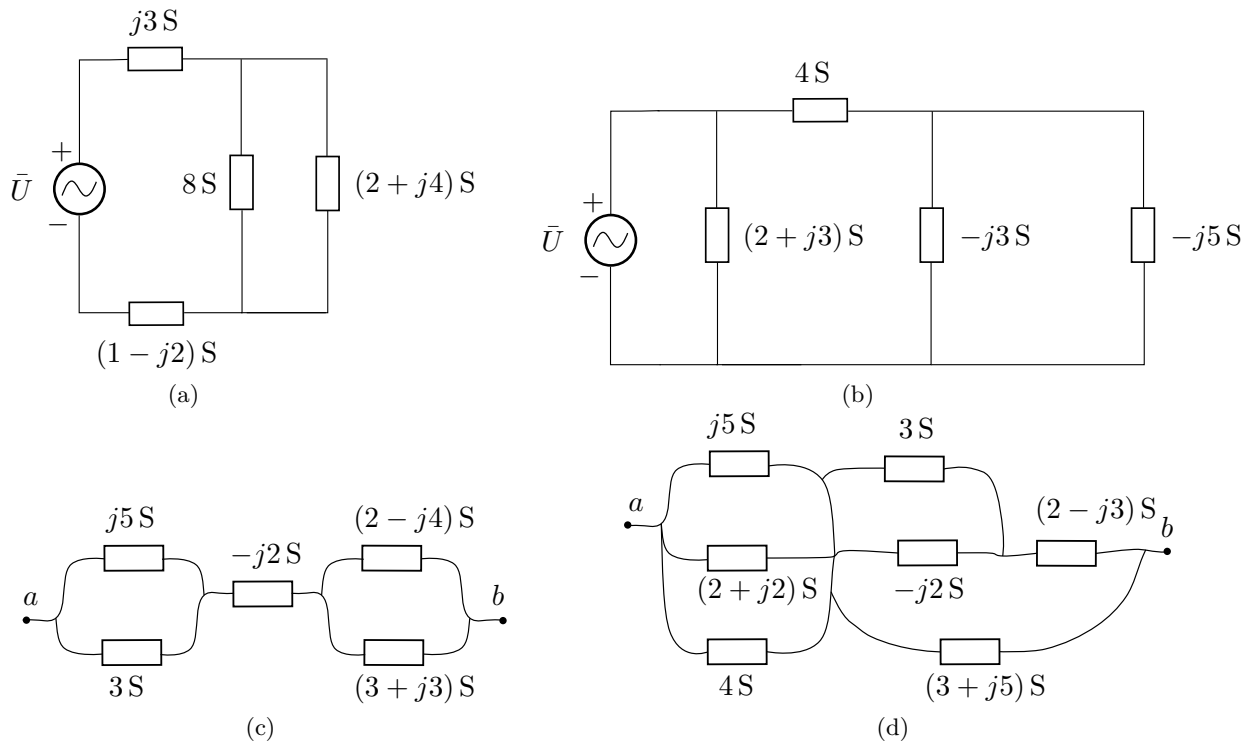


Figura 10.22: Circuitos elétricos relativos ao problema 10.6.

Capítulo 11

Potência em circuitos monofásicos

11.1 Introdução

Nos circuitos CC, o cálculo de potência é simplificado, pois depende apenas das magnitudes da tensão nos terminais e da corrente no dispositivo elétrico analisado. Já nos circuitos CA, o cálculo é mais complicado pois, além das magnitudes, deve ser levada em consideração também a defasagem entre as ondas de tensão e de corrente: você já viu em capítulo anterior a definição de $\phi = \theta_u - \theta_i$ como sendo o ângulo de atraso da corrente em relação à tensão e ele é muito importante nos cálculos das potências em circuitos CA. Mais uma vez é mandatório que o estudante tenha fluência nas operações com números complexos, afinal de contas o uso dos fasores como meio para representar as tensão e corrente senoidais/cossenoidais faz com que números complexos surjam nos cálculos de potência.

11.2 Potências complexa, aparente, ativa e reativa

Em um circuito elétrico cujas tensões e correntes são valores contínuos, encontra-se o valor da potência em um dispositivo elétrico qualquer a partir do valor da tensão em seus terminais e da corrente que o atravessa, ou seja, $P = UI$. Para um circuito elétrico cujas tensões e correntes são funções alternadas, são utilizadas equações similares, porém com algumas peculiaridades, já que há entre a fonte e a carga uma troca não somente de potência para gerar trabalho, mas também há uma troca de potência para gerar campo elétrico e magnético. A expressão geral para o cálculo de potência em um dispositivo num circuito elétrico com tensão e corrente alternadas é:

$$\mathbf{S} = \bar{U} \bar{I}^* \quad (11.1)$$

Sendo:

- $\bar{U}$ o fasor tensão nos terminais do dispositivo elétrico;
- $\bar{I}^*$ o complexo conjugado do fasor corrente que atravessa o dispositivo e;
- $\mathbf{S}$ o valor da potência chamada de *potência complexa*.

Note que a potência complexa é um número complexo (já que é resultado da multiplicação de dois números complexos) e isso é frisado pelo uso do negrito $\mathbf{S}$. Nas edições anteriores deste livro era utilizada uma barra para indicar a potência complexa ($\bar{S}$), mas como ela não é um fasor girante e sim um número complexo resultante da operação entre dois fasores, preferiu-se na presente edição utilizar o negrito, que, por sinal, é também outra notação comum para números complexos. Se você desejar representar a potência complexa como $\bar{S}$, então o faça, pois não estará errado, sendo inclusive mais simples de se escrever dessa forma no caderno de papel: lembre-se sempre que se seu professor tem

alguma sugestão de notação, é muito conveniente seguir as orientações dele. Assim sendo, a potência complexa pode ser representada por seus módulo e ângulo, como feito a seguir:

$$\begin{cases} \mathbf{S} = S \angle \phi \\ \mathbf{S} = |\bar{U}| |\bar{I}| \angle \phi \end{cases} \quad (11.2)$$

Chama-se o módulo da potência complexa S de *potência aparente*. Pode-se também representar $\mathbf{S}$ na forma retangular e assim é encontrado que:

$$\begin{cases} \mathbf{S} = S \cos(\phi) + j S \sin(\phi) \\ \mathbf{S} = |\bar{U}| |\bar{I}| \cos(\phi) + j |\bar{U}| |\bar{I}| \sin(\phi) \\ \mathbf{S} = P + jQ \end{cases} \quad (11.3)$$

Note o ângulo ϕ nas equações (11.2) e (11.3): ele é o mesmo ângulo de atraso da corrente em relação à tensão que foi visto no capítulo 10. Nas impedâncias a parte real do número representa o efeito resistivo e a parte imaginária os efeitos indutivo e capacitivo. O mesmo acontece na potência complexa e a parte real P diz respeito à potência consumida para algum fim útil (por exemplo, aquecimento por efeito Joule), enquanto que a parte imaginária Q diz respeito à potência necessária para gerar os campos elétrico (para os capacitores) e magnético (para os indutores). À parte real da potência complexa dá-se o nome de *potência ativa*, ou use o P para representá-la de forma mais compacta, e à parte imaginária dá-se o nome de *potência reativa*, que pode ser representada por Q .

Depois desta visão geral sobre o comportamento da potência em circuitos CA, será dado na sequência destaque a cada um dos tipos de potências, que são chamadas de ativa, reativa, aparente e complexa. O desenvolvimento que segue terá como exemplo uma *carga*, que é um dispositivo ou instalação que consome potência para algum fim, representada por uma impedância $\mathbf{Z}$, mas as equações são válidas para impedâncias de linhas de distribuição ou de transmissão, de geradores ou motores etc. Enfim, as equações serão úteis em diversos contextos, ainda que seja apresentada inicialmente para uma carga.

Potência Ativa É a parcela da potência complexa que realiza trabalho e sua unidade é o já conhecido watt, cujo símbolo é o W. Nos circuitos, o dispositivo que deve ser associado à potência ativa é a resistência. Desta maneira, o cálculo da potência na resistência fornece o valor da potência ativa. No caso de uma carga elétrica representada por uma impedância $\mathbf{Z}$ que possua resistências, indutâncias e capacitâncias, como mostra a figura 11.1, pode-se calcular a potência ativa usando a expressão:

$$P = |\bar{U}_Z| |\bar{I}_Z| \cos(\phi) \quad (11.4)$$

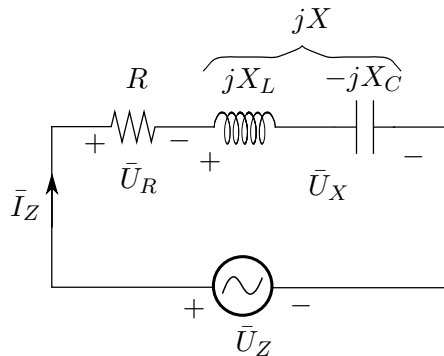


Figura 11.1: Tensões e correntes na carga.

Sendo que $|\bar{U}_Z|$ denota a magnitude da tensão nos terminais da carga, $|\bar{I}_Z|$ denota a intensidade da corrente elétrica que atravessa a carga e $\phi = \theta_u - \theta_i$ denota a diferença angular entre a corrente e a tensão nos terminais da carga.

Deve-se observar que as demais expressões que calculam a potência nas resistências também fornecem os valores de P , são elas:

$$P = R|\bar{I}_R|^2 \quad (11.5)$$

$$P = \frac{|\bar{U}_R|^2}{R} \quad (11.6)$$

A equação (11.5) permite encontrar a potência ativa consumida na carga resistiva se o valor da resistência da carga e da magnitude (módulo) da corrente que atravessa esta resistência forem conhecidas. No caso do circuito elétrico mostrado na figura 11.1 pode-se perceber que $|\bar{I}_R| = |\bar{I}_Z|$. A equação (11.6) deve ser empregada com bastante cuidado, pois deve-se conhecer o valor da resistência da carga e também a magnitude (módulo) da tensão nos terminais desta resistência $|\bar{U}_R|$: é um erro comum empregar-se o módulo da tensão total na carga, cujo valor é $|\bar{U}_Z|$. Para que fique mais claro, estão indicados na figura 11.1 tanto $\bar{U}_R$ quanto $\bar{U}_Z$ e fica evidente que $\bar{U}_R \neq \bar{U}_Z$.

Exemplo 11.1. Uma carga que pode ser representada por uma impedância de $5 + j2\ \Omega$ é alimentada pelos seus terminais com uma tensão de 220 V. Calcule:

- (a) O módulo da corrente drenada pela carga;
- (b) A potência ativa consumida pela carga.

Solução:

Como não foi dado o ângulo da tensão, faz-se a consideração que ele é zero, assim o fasor tensão nos terminais da carga pode ser escrito como $\bar{U}_c = 220\angle 0^\circ\text{ V} = 220\text{ V}$.

- (a) O valor da corrente consumida pela carga é:

$$\begin{aligned} \bar{I}_c &= \frac{\bar{U}_c}{\bar{Z}_c} \\ \bar{I}_c &= \frac{220}{5 + j2} \\ \bar{I}_c &= \frac{220}{5,385\angle 21,8^\circ} \\ \bar{I}_c &= 40,85\angle -21,8^\circ\text{ A} \end{aligned}$$

O módulo da corrente é, portanto, igual a 40,85 A.

- (b) A potência ativa pode ser calculada com o uso da equação (11.4). Para isto é necessário calcular o ângulo $\phi_c = \theta_u - \theta_i = 0^\circ - (-21,8^\circ) = 21,8^\circ$. Tem-se também que $\cos(21,8^\circ) = 0,928$. Então a potência ativa consumida pela carga é:

$$\begin{aligned} P_c &= |\bar{U}_c||\bar{I}_c|\cos(\phi_c) \\ P_c &= 220 \times 40,85 \times \cos(21,8^\circ) \\ P_c &= 220 \times 40,85 \times 0,928 \\ P_c &= 8344,3\text{ W} \\ P_c &\approx 8,34\text{ kW} \end{aligned}$$

Outra forma de fazer é utilizando a equação (11.5), como mostrado na sequência:

$$\begin{aligned} P_c &= R|\bar{I}_R|^2 \\ P_c &= 5 \times 40,85^2 \\ P_c &\approx 8,34\text{ kW} \end{aligned}$$

□

Potência Reativa É a parcela da potência complexa que não realiza trabalho e sua unidade é o volt-ampère-reactivo cujo símbolo é o VAR ou VAR: autores escrevem de forma diferente e não há consenso e será adotada a primeira opção no presente livro. Nos circuitos, o dispositivo que deve ser associado a ela é a reatância (seja ela indutiva ou capacitiva). Desta maneira, o cálculo da potência nas reatâncias fornece os valores da potência reativa. No caso de uma carga $\mathbf{Z}$ que possua resistências, indutâncias e capacitâncias, como mostrado na figura 11.1, a potência reativa pode ser calculada usando a expressão:

$$Q = |\bar{U}_Z| |\bar{I}_Z| \sin(\phi) \quad (11.7)$$

Sendo que $|\bar{U}_Z|$ denota a magnitude da tensão nos terminais da carga, $|\bar{I}_Z|$ denota a intensidade da corrente elétrica que atravessa a carga e $\phi = \theta_u - \theta_i$ denota a abertura angular entre tensão e a corrente da carga.

Outras expressões que fornecem o valor de Q são:

$$Q = \pm X |\bar{I}_X|^2 \quad (11.8)$$

$$Q = \pm \frac{|\bar{U}_X|^2}{X} \quad (11.9)$$

A equação (11.8) permite o cálculo direto da potência reativa, que pode ser negativa, caso a reatância seja capacitiva, ou positiva, caso a reatância seja indutiva, usando o valor da intensidade da corrente que percorre a reatância. A equação (11.9) deve ser empregada quando são conhecidos os valores da reatância e da tensão nos seus terminais. Deve-se ter muito cuidado, pois é um erro comum se usar a magnitude da d.d.p. total na carga $|\bar{U}_Z|$, enquanto que o valor que deve ser usado é a magnitude da tensão apenas nos terminais da reatância, cujo valor é $|\bar{U}_X|$. Para que fique mais claro, estão indicados na figura 11.1 tanto $\bar{U}_X$ quanto $\bar{U}_Z$ e uma inspeção evidencia que $\bar{U}_X \neq \bar{U}_Z$. Ao utilizar a equação (11.7) o sinal do $\sin(\phi)$ determinará o sinal da potência reativa Q .

Uma carga é o nome genérico dado a um equipamento ou instalação elétrica que realiza alguma tarefa e para isto consome potência ativa P e, portanto, $P > 0$. Porém, uma carga pode fornecer ou consumir potência reativa. Para deixar claro, faz-se as seguintes definições:

- Diz-se que uma carga indutiva consome potência reativa. Isto é equivalente a dizer que o valor da potência reativa de uma carga indutiva é sempre positivo ($Q > 0$);
- Diz-se que uma carga capacitiva fornece potência reativa. Isto é equivalente a dizer que o valor da potência reativa de uma carga indutiva é sempre negativo ($Q < 0$).

A equação (11.7) pode ser usada diretamente, sem maiores problemas, pois se o ângulo ϕ for utilizado corretamente, então o valor da potência reativa já será positivo ou negativo. Entretanto, nas equações (11.8) e (11.9) é necessário escolher o sinal $+$ ou $-$. Se usará o valor positivo quando a carga for indutiva e se usará o valor negativo quando a carga for capacitiva.

Exemplo 11.2. Uma carga que pode ser representada por uma impedância de $5 + j2\Omega$ é alimentada pelos seus terminais com uma tensão de 220 V (note que são a mesma carga e tensão do exemplo 11.1). Calcule a potência reativa da carga.

Solução:

A potência reativa da carga pode ser calculada pela equação (11.7). O valor do ângulo $\phi_c = 21,8^\circ$ já havia sido calculado no exemplo 11.1 e, portanto, $\sin(\phi_c) = \sin(21,8^\circ) = 0,371$. Tem-se assim

que:

$$\begin{aligned}Q_c &= |\bar{U}_c| |\bar{I}_c| \sin(\phi_c) \\Q_c &= 220 \times 40,85 \times 0,371 \\Q_c &= 3\,334 \text{ VAr} \\Q_c &\approx 3,33 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

Uma outra forma de calcular a potência reativa é utilizando a equação (11.8). Saliente-se que como a carga é indutiva (pois a parte imaginária do valor da impedância é positiva) deve-se usar o sinal +. Tem-se assim que:

$$\begin{aligned}Q_c &= +X_c |\bar{I}_c|^2 \\Q_c &= 2 \times 40,85^2 \\Q_c &\approx 3,33 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

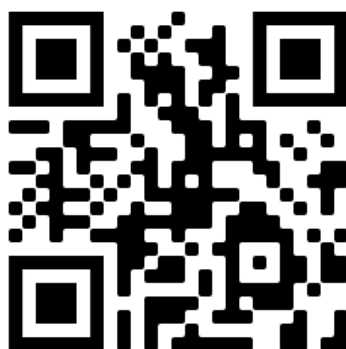
Saliente-se que quaisquer diferenças entre os valores encontrados nas duas formas de se calcular Q_c se devem apenas às aproximações: quanto mais casas decimais são utilizadas mais próximos ficam os resultados numéricos finais.

□

Se você teve dúvidas, então veja a videoaula a seguir, mas, caso tenha entendido, siga adiante para mais discussões sobre potências CA.

Videoaula 11.1 (Potências ativa e reativa). Para mais detalhes sobre os conceitos e equações das potências ativa e reativa acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/c14XB-JDrRA>



Potência Complexa É a representação complexa das potências ativa e reativa; sua unidade é o volt-ampère cujo símbolo é o VA. Ela é representada por $\mathbf{S}$ e é dada por:

$$\mathbf{S} = P + jQ \quad (11.10)$$

$\mathbf{S}$ é uma maneira de representar a potência total da carga, considerando-se as potências ativa e reativa. Se $\mathbf{S}$ é dado em coordenadas polares, então:

$$\mathbf{S} = \sqrt{P^2 + Q^2} \angle \phi \quad (11.11)$$

Sendo $\sqrt{P^2 + Q^2}$ o módulo e $\phi = \theta_u - \theta_i$ o ângulo da potência complexa, também sendo o ângulo de atraso da corrente em relação à tensão.

Outra forma de se calcular a potência complexa $\mathbf{S}$ é a partir do conhecimento do fasor tensão nos terminais da carga, $\bar{U}_Z$, e do fasor corrente que atravessa a carga, $\bar{I}_Z$, usando a expressão (que foi a primeira apresentada neste capítulo, mas que vale a pena reescrever):

$$\mathbf{S} = \bar{U}_Z \bar{I}_Z^* \quad (11.12)$$

O estudante deve ter em mente que $\bar{I}_Z^*$ é o complexo conjugado do fasor corrente $\bar{I}_Z$.

Sendo $\mathbf{S}$ uma representação da potência total, incluindo a parte ativa e reativa, é de imaginar, portanto, que existam expressões que nos permitam calculá-la usando a impedância da carga $\mathbf{Z} = R + jX$. Estas expressões são:

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z} |\bar{I}_Z|^2 \quad (11.13)$$

$$\mathbf{S} = \frac{|\bar{U}_Z|^2}{\mathbf{Z}^*} \quad (11.14)$$

$\mathbf{Z}^*$ é conjugado complexo da impedância complexa.

Potência Aparente É o nome dado ao módulo da potência complexa. A potência aparente é usada para o dimensionamento das instalações elétricas, principalmente condutores, pois é ela que dá a real grandeza do valor da corrente total que é drenada por uma carga $\mathbf{Z}$. Representa-se a mesma pelo símbolo S (note que o módulo não está em negrito) e sua unidade também é o VA (volt-ampère). O valor de S pode ser calculado por:

$$S = |\bar{U}_Z| |\bar{I}_Z| \quad (11.15)$$

Ou ainda pelas expressões:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (11.16)$$

$$S = Z |\bar{I}_Z|^2 \quad (11.17)$$

$$S = \frac{|\bar{U}_Z|^2}{Z} \quad (11.18)$$

Exemplo 11.3. Uma carga é alimentada por uma fonte de tensão cujo valor da tensão é 220 V e cuja impedância que representa a mesma vale $3 - j1 \Omega$. Calcule os valores das potências complexa, aparente, ativa e reativa da carga.

Solução:

Primeiramente será calculado o fasor da corrente drenada pela carga, que é utilizado no decorrer da solução:

$$\begin{aligned} \bar{I}_c &= \frac{\bar{U}_c}{\mathbf{Z}_c} \\ \bar{I}_c &= \frac{220 \angle 0^\circ}{3 - j1} \\ \bar{I}_c &= \frac{220 \angle 0^\circ}{3,16 \angle -18,44^\circ} \\ \bar{I}_c &= 69,62 \angle 18,44^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Empregando-se a equação (11.12) (note que se usa o conjugado complexo do fasor corrente $\bar{I}_c^* = 69,62/-18,44^\circ$ A), encontra-se que a potência complexa é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_c &= \bar{U}_c \bar{I}_c^* \\ \mathbf{S}_c &= (220\angle 0^\circ) \times (69,62\angle -18,44^\circ) \\ \mathbf{S}_c &= 15\,316\angle -18,44^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

A potência aparente é o módulo da potência complexa, portanto, seu valor é:

$$S_c = 15\,316 \text{ VA} \approx 15,32 \text{ kVA}$$

Colocando-se a potência complexa em coordenadas retangulares pode-se encontrar os valores das potências ativa e reativa (ver equação (11.10)). Assim tem-se que $\mathbf{S}_c$ em coordenadas retangulares é:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_c &= 15\,316\angle -18,44^\circ \\ \mathbf{S}_c &= 15\,316 \cos(-18,44^\circ) + j15\,316 \sin(-18,44^\circ) \\ \mathbf{S}_c &= 14\,530 - j4\,845 \text{ VA} \end{aligned}$$

Portanto, a potência ativa é:

$$P_c = 14\,530 \text{ W} \approx 14,53 \text{ kW}$$

e a potência reativa é:

$$Q_c = -4\,845 \text{ VAr} \approx -4,85 \text{ kVAr}$$

A carga é capacitiva (a parte imaginária da impedância da carga é negativa), então, como esperado, o valor da potência reativa foi negativo, ou seja, pode-se dizer que a carga fornece uma potência reativa de 4,85 kVAr.

□

Mais discussões sobre potências CA nas videoaulas que seguem, mas só vale a pena abandonar o livro neste momento se você tiver muitas dúvidas, pois o assunto da próxima seção é muito relevante e pode ser estudado já em sequência.

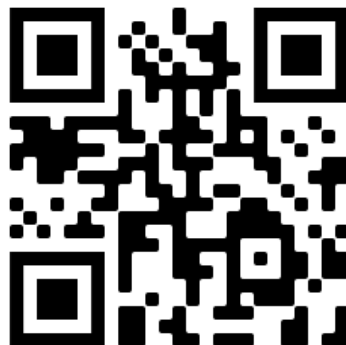
Videoaula 11.2 (Potências complexa e aparente). Para mais detalhes sobre os conceitos e equações das potências complexa e aparente acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/CxLvdIgo2UY>



Videoaula 11.3 (Potências complexa, aparente, ativa e reativa). Para mais detalhes sobre comparação conceitual e relações entre equações das potências complexa e aparente acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/_V-vNCfIdpY



11.2.1 Fator de potência

O conteúdo até agora apresentado neste capítulo mostrou que nem toda potência que entra em um dispositivo elétrico gera trabalho. Há uma parcela, chamada de potência reativa, que oscila entre a fonte e a carga. Esta potência é necessária, pois existe em dispositivos indutivos para gerar o campo magnético e em dispositivos capacitivos para gerar campo elétrico que são meios para se acumular energia.

Para definir quanto da potência de um certo dispositivo gera trabalho, foi criado um índice chamado *fator de potência*, que é a razão entre a potência ativa (relacionada com o trabalho) e a potência aparente (que é a soma vetorial das potências ativa e reativa). Matematicamente, o fator de potência FP é:

$$FP = \frac{P}{S} \quad (11.19)$$

Da equação (11.19) pode-se notar que FP pode ser no máximo igual a unidade. Este seria o caso do dispositivo não consumir ou fornecer nenhuma potência reativa ($Q = 0$) e assim $S = P$. No caso do dispositivo ser puramente indutivo ou puramente capacitivo tem-se que $P = 0$ e, portanto, $FP = 0$.

É desejo da concessionária fornecedora de energia elétrica que as cargas consumidoras possuam fator de potência mais próximo possível da unidade, pois nessa condição particular toda a energia fornecida seria utilizada para realizar trabalho. Se as cargas possuem fatores de potência muito baixos, significa dizer que os geradores elétricos das usinas conectadas ao sistema elétrico estão operando para gerar certa quantidade significativa de potência que não será aproveitada, já que se FP é baixo, então a potência reativa é elevada.

Substituindo-se os valores de potências ativa e aparente na equação (11.19), tem-se que:

$$FP = \frac{|\bar{U}||\bar{I}| \cos(\phi)}{|\bar{U}||\bar{I}|}$$

que resulta em

$$FP = \cos(\phi) \quad (11.20)$$

É necessário salientar que o valor do cosseno de ângulos positivos ou negativos tem sempre o mesmo valor, assim tem-se, por exemplo, $\cos(45^\circ) = 0,707$ e $\cos(-45^\circ) = 0,707$. Desta maneira, não dá para

identificar pelo valor do fator de potência se a carga é indutiva ou capacitiva, pois independe do sinal de ϕ . Geralmente, esta informação é dada dizendo-se, além do valor, se o fator de potência é atrasado (para o caso de cargas indutivas, pois a corrente é atrasada em relação à tensão) ou adiantado (para o caso de cargas capacitivas, pois a corrente é adiantada em relação à tensão).

Exemplo 11.4. Para uma carga representada por uma impedância $\mathbf{Z} = 5\angle 30^\circ \Omega$ e alimentada por uma fonte de 127 V, determine: as potências complexa, aparente, ativa e reativa da carga, bem como o seu fator de potência.

Solução:

Precisa-se, inicialmente, calcular a corrente que percorre esta carga. Sendo assim tem-se:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\mathbf{Z}} = \frac{127\angle 0^\circ}{5\angle 30^\circ} = 25,4\angle -30^\circ \text{ A}$$

Calculada a corrente, pode-se agora calcular a potência complexa:

$$\mathbf{S} = \bar{U}\bar{I}^* = (127\angle 0^\circ) \times (25,4\angle +30^\circ) = 3\,225,8\angle 30^\circ \text{ VA} = 2\,793,62 + j1\,612,90 \text{ VA}$$

Da potência complexa na forma polar, identifica-se a potência aparente e da potência complexa na forma retangular, identifica-se as potências ativa e reativa:

$$S = 3\,225,8 \text{ VA}$$

$$P = 2\,793,62 \text{ W}$$

$$Q = 1\,612,90 \text{ VAR}$$

O fator de potência é o cosseno do ângulo de potência complexa na representação polar, que é o mesmo ângulo de atraso da corrente em relação à tensão. Sendo assim:

$$\phi = \theta_u - \theta_i = 0 - (-30^\circ) = 30^\circ$$

e

$$\text{FP} = \cos(\phi) = \cos(30^\circ) = 0,5$$

Divida P por S e encontrará o mesmo fator de potência.

□

Exemplo 11.5. Para uma carga que é alimentada por uma fonte de tensão alternada de módulo 220 V, que consome uma potência ativa de 50 kW e possui um fator de potência 0,8 indutivo (atrasado), encontre:

- (a) A corrente da carga;
- (b) A impedância que representa a carga;
- (c) A potência reativa da carga;
- (d) A potência aparente da carga;
- (e) Um diagrama fasorial com tensão de alimentação e a corrente da carga.

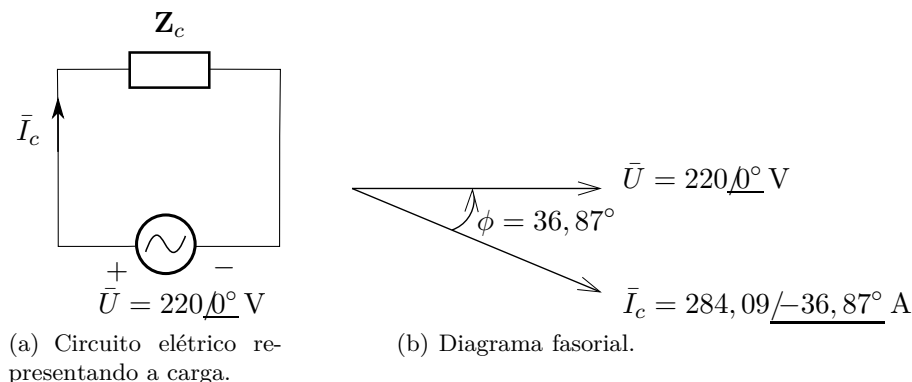


Figura 11.2: Ilustrações relativas a solução do exemplo 11.5.

Solução:

Para auxiliar na solução deste problema será utilizado o circuito elétrico da figura 11.2(a), que mostra a carga sendo representada por uma impedância $\mathbf{Z}_c$, a corrente que atravessa a carga sendo representada por $\bar{I}_c$ e a tensão de alimentação sendo representada por $\bar{U} = 220\angle 0^\circ$ V. Nitidamente a tensão da fonte é a mesma da carga, portanto $\bar{U}_c = \bar{U}$. Note que como nenhum valor de ângulo das variáveis elétricas foi determinado pelo enunciado do exemplo, então pode-se escolher o ângulo 0° para a tensão com o intuito de facilitar as contas.

- (a) Lembrando que o fator de potência é o próprio valor do $\cos(\phi) = 0,8$, o módulo da corrente da carga é dada pela equação (11.4):

$$\begin{aligned}
 P_c &= |\bar{U}_c| |\bar{I}_c| \cos(\phi) \\
 |\bar{I}_c| &= \frac{P_c}{|\bar{U}_c| \cos(\phi)} \\
 |\bar{I}_c| &= \frac{50\,000}{220 \times 0,8} \\
 |\bar{I}_c| &= 284,09 \text{ A}
 \end{aligned}$$

O ângulo ϕ denota o atraso da corrente em relação à tensão. Como a carga é indutiva, então ϕ é positivo (isto mesmo, o ângulo de atraso é positivo quando a carga é indutiva) e tem valor:

$$\phi = \arccos(0,8) = 36,87^\circ$$

Assim a corrente da carga é:

$$\bar{I}_c = 284,09 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

Você poderia encontrar o ângulo da corrente com a expressão: $\phi = \theta_u - \theta_i$, sabendo que $\phi = 36,87^\circ$ e $\theta_u = 0^\circ$ fica fácil descobrir que $\theta_i = -36,87^\circ$, mas isto é trabalho demais quando se pode somente interpretar o cenário para descobrir o sinal do ângulo da corrente.

- (b) A impedância $\mathbf{Z}_c$ é encontrada por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_c &= \frac{\bar{U}_c}{\bar{I}_c} \\
 \mathbf{Z}_c &= \frac{220\angle 0^\circ}{284,09 \angle -36,87^\circ} \\
 \mathbf{Z}_c &= 0,7744 \angle 36,87^\circ \Omega \\
 \mathbf{Z}_c &= 0,620 + j0,465 \Omega
 \end{aligned}$$

(c) A potência reativa da carga pode ser encontrada via equação (11.7):

$$\begin{aligned}Q_c &= |\bar{U}_c| |\bar{I}_c| \sin(\phi) \\Q_c &= 220 \times 284,09 \times \sin(36,87^\circ) \\Q_c &= 220 \times 284,09 \times 0,6 \\Q_c &= 37\,500 \text{ VAr} \\Q_c &= 37,5 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

Uma maneira alternativa de se encontrar a potência reativa é empregando a equação (11.8) como feito a seguir:

$$\begin{aligned}Q_c &= +X_c |\bar{I}_c|^2 \\Q_c &= (0,465) \times (284,09)^2 \\Q_c &= 37\,500 \text{ VAr} \\Q_c &= 37,5 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

Que fique evidente que X_c é a reatância da carga, que é indutiva; por isto o sinal da potência reativa é o +.

(d) A potência aparente S da carga pode ser encontrada usando a equação (11.15), assim tem-se:

$$\begin{aligned}S &= |\bar{U}_c| |\bar{I}_c| \\S &= 220 \times 284,09 \\S &= 62\,500 \text{ VA} \\S &= 62,5 \text{ kVA}\end{aligned}$$

Uma maneira alternativa de se encontrar a potência aparente é empregando a equação (11.16), como feito a seguir:

$$\begin{aligned}S^2 &= P^2 + Q^2 \\S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\S &= \sqrt{50\,000^2 + 37\,500^2} \\S &= 62\,500 \text{ VA} \\S &= 62,5 \text{ kVA}\end{aligned}$$

Como esperado, o valor da potência aparente é o mesmo independentemente do método de cálculo utilizado.

(e) O diagrama fasorial solicitado é mostrado na figura 11.2(b) e pode-se observar que, como a carga é indutiva, a corrente que a atravessa está atrasada em relação à tensão nos seus terminais. Neste livro, o ângulo ϕ é indicado da corrente para a tensão, para indicar que ele representa $\theta_u - \theta_i$.

□

Exemplo 11.6. Um equipamento possui uma potência de 500 VA e um fator de potência 0,85 capacitivo quando alimentado por uma fonte de tensão de 220 V. Determine o valor da impedância deste equipamento.

Solução:

Se o fator de potência da carga é 0,85 capacitivo, então o ângulo da carga é:

$$\phi = -\arccos(0,85) = -31,79^\circ$$

A potência informada é a potência aparente do equipamento. Pode-se agora determinar qual a potência complexa do mesmo.

$$\mathbf{S} = S/\phi = 500/-31,79^\circ \text{ VA} = 424,99 - j263,40 \text{ VA}$$

Agora pode-se determinar a corrente que passa pelo equipamento utilizando a equação (11.12):

$$\bar{I}^* = \frac{\mathbf{S}}{\bar{U}} = \frac{500/-31,79^\circ}{220/0^\circ} = 2,27/-31,79^\circ \text{ A}$$

Então:

$$\bar{I} = 2,27/31,79^\circ \text{ A}$$

Finalmente determina-se a impedância do equipamento:

$$\mathbf{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{220/0^\circ}{2,27/31,79^\circ} = 96,92/-31,79^\circ \Omega = 82,38 - j51,06 \Omega$$

□

Videoaula 11.4 (Fator de potência). Para saber detalhes sobre a influência do fator de potência no sistema elétrico acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/eG4C_8SqQYM



11.2.2 Triângulo de potências

Uma forma muito comum de se realizar a análise de potências em cargas alimentadas com tensão e corrente alternadas é desenhando o triângulo de potências. Para compreendê-lo deve-se lembrar que a potência complexa $\mathbf{S}$ é representada no plano complexo como mostrado na figura 11.3. Se não mais for utilizado o plano complexo, pode-se alternativamente representar as potências como na figura 11.4, de maneira que a forma triangular desta representação se chama *triângulo de potências*.

Deve-se salientar que a figura 11.4(a) representa as potências de uma carga indutiva ($Q > 0$), e que se a carga for capacitiva então o triângulo de potências fica como mostrado na figura 11.4(b) (pois $Q < 0$).

A diferença angular entre a tensão e a corrente na carga recebe o nome de *ângulo de potência*. Este ângulo de potência pode ser chamado também de *ângulo de carga*. Note que este é o mesmo ângulo ϕ tratado anteriormente. Apenas recebe denominações diferentes a depender do que se está estudando. Veja que o triângulo de potência é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é a potência aparente S , o cateto oposto ao ângulo de carga ϕ é a potência reativa Q e o cateto adjacente é a potência ativa P : use as relações trigonométricas para encontrar variáveis sempre que julgar conveniente.

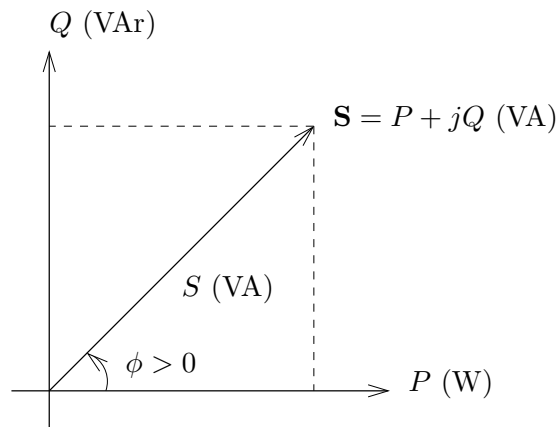


Figura 11.3: Potência complexa.

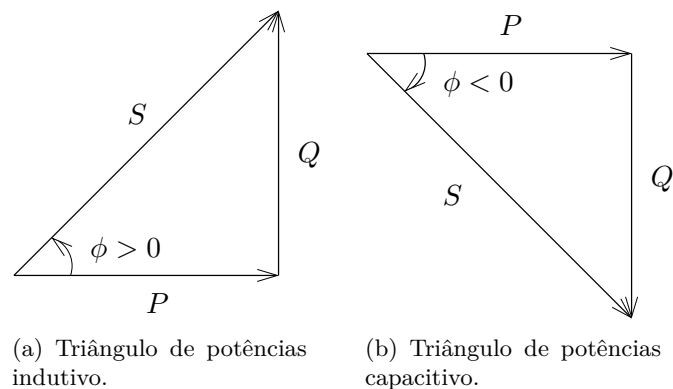


Figura 11.4: Triângulos de potências.

Exemplo 11.7. Uma carga, alimentada com uma tensão de 127 V, consome uma potência ativa de 100 kW com um fator de potência de 0,92 indutivo. Desenhe o triângulo de potências relativo a esta carga.

Solução:

Para desenhar o triângulo de potências deve-se saber os valores das potências aparente, ativa e reativa. A potência ativa foi dada no enunciado e vale $P = 100\,000\text{ W}$. A potência aparente pode ser calculada como feito a seguir:

$$\begin{aligned}\text{FP} &= \frac{P}{S} \\ S &= \frac{P}{\text{FP}} \\ S &= \frac{100\,000}{0,92} \\ S &= 108\,700\text{ VA} \\ S &= 108,7\text{ kVA}\end{aligned}$$

Só falta a potência reativa Q , cujo valor pode ser encontrado a partir da expressão $S^2 = P^2 + Q^2$,

que pode ser derivada do próprio triângulo de potências. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= P^2 + Q^2 \\
 Q &= \sqrt{S^2 - P^2} \\
 Q &= \sqrt{(108\,700)^2 - (100\,000)^2} \\
 Q &= 42\,600 \text{ VAr} \\
 Q &= 42,6 \text{ kVAr}
 \end{aligned}$$

A ilustração do triângulo de potências é mostrada na figura 11.5. Note que são encontradas na literatura a indicação de um triângulo sem setas (figura 11.5) ou com setas (11.4) e, portanto, ambas as formas são empregadas neste livro sem haver nenhuma contradição. Geralmente, o valor do ângulo ϕ também é representado, apesar de ser desnecessário a sua representação no triângulo, já que os valores das três potências já permitem o cálculo das outras variáveis. O valor de ϕ é obtido do valor do $\text{FP} = \cos(\phi)$, ou seja:

$$\phi = \arccos(0,92) = 23,07^\circ$$

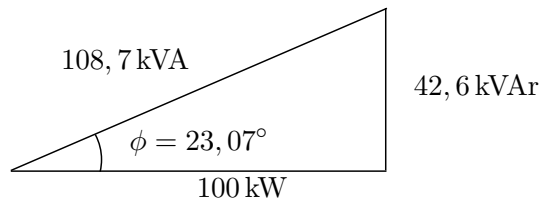
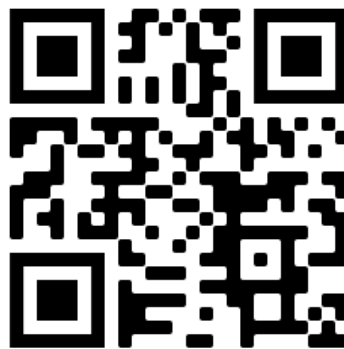


Figura 11.5: Triângulo de potências relativo ao exemplo 11.7.

□

Videoaula 11.5 (Triângulo de potências). Para mais detalhes sobre o triângulo de potência e sua relação com as potências complexa, aparente, ativa e reativa acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/Yl2DGs1FGAY>



11.3 Resumo do capítulo

Em circuitos CA torna-se necessário estudar quatro tipos de potências: a complexa, a aparente, a ativa e a reativa. Os conceitos relacionados a elas são resumidos a seguir:

- A potência ativa é relacionada a realização de trabalho e sua unidade é o watt (W);
- A potência reativa é relacionada ao fluxo de potência trocado entre a fonte e os demais dispositivos sem a realização de trabalho. Sua unidade é o volt-ampère-reativo (VAr);
- As potências complexa e aparente englobam as ativa e reativa. A potência complexa faz uso dos valores das potências ativa e reativa como número complexo, enquanto que a aparente é o módulo da potência complexa. Ambas têm como unidade o volt-ampère (VA);
- O fator de potência é a relação entre as potências ativa e aparente, ou seja, diz do total da potência que chegou ao dispositivo quanto foi transformado em trabalho;
- O triângulo de potências é uma representação gráfica das potências aparente, ativa e reativa. Neste triângulo ainda pode ser identificado o ângulo ϕ que é o que permite o cálculo do fator de potência ($FP = \cos(\phi)$).

Problemas propostos

Problema 11.1. Sabendo que a tensão nos terminais de uma carga de fator de potência igual a 0,9 capacitivo é de $380 \angle 0^\circ$ V e que a mesma consome uma potência de 5 kW, responda:

- Qual o valor do fasor corrente drenada pela carga?
- Quais os valores das potências complexa, aparente e reativa?
- Desenhe o triângulo de potências da carga.

Problema 11.2. Uma carga é alimentada pelos seus terminais com uma tensão de 600 V e fornece a rede elétrica 2 kVAr e consome 8 kW, responda:

- Qual é o valor do ângulo de carga?
- Qual a impedância (magnitude e ângulo) da carga?
- Desenhe o triângulo de potências da carga.

Problema 11.3. Um motor elétrico monofásico é alimentado com uma tensão de 127 V, consome uma potência de 900 W e drena uma corrente elétrica de 12 A. Este motor é do tipo de indução, que possui fator de potência indutivo.

- Qual o fator de potência deste motor?
- Qual o valor da potência reativa? Ela é consumida ou fornecida pelo motor? Justifique.

Problema 11.4. O triângulo de potências da figura 11.6 possui os valores de potência de uma carga que é alimentada pelos seus terminais com uma tensão de 380 V.

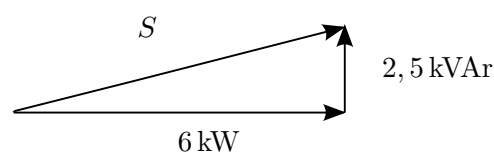


Figura 11.6: Triângulo de potência.

- (a) Qual o fator de potência da carga? O fator de potência é indutivo ou capacitivo? Justifique.
- (b) Qual a corrente (magnitude e ângulo) drenada pela carga?
- (c) Qual a impedância (na forma retangular) que representa a carga?

Problema 11.5. Para uma carga de impedância $5 + j3 \Omega$ alimentada por uma tensão de valor $220\angle 0^\circ$ V, determine:

- (a) A corrente da carga;
- (b) As potências complexa, aparente, ativa e reativa;
- (c) O fator de potência da carga;
- (d) O triângulo de potências da carga.

Problema 11.6. Um motor possui fator de potência 0,95 e consome da rede 2000 W. Sabendo que este motor é alimentado em 220 V, determine a impedância que o representa.

Problema 11.7. Determine as potências ativa e reativa de uma carga, sabendo que quando a mesma é ligada a uma fonte de tensão de 380 V, drena desta uma corrente de valor $22\angle 57^\circ$ A.

Problema 11.8. Desenhe o triângulo de potências para uma carga cujo fator de potência é 0,8 atrasado e que quando é alimentada por uma fonte de tensão de 127 V, possui uma potência de 500 VA.

Capítulo 12

Sistemas de equações com números complexos

12.1 Introdução

No capítulo 5 foi explicado como solucionar sistemas de equações lineares para que no capítulo 6 o estudante tivesse em mente ferramentas matemáticas para auxiliar na solução de circuitos com técnicas mais avançadas (análise de malhas e nodal; teoremas de Thévenin, de Norton e da superposição; entre outros métodos). O conteúdo do presente capítulo apresenta técnicas de solução de sistemas lineares com números complexos para que os métodos de solução de circuitos mais complexos sejam melhor compreendidos posteriormente no capítulo 13, que trata de circuitos CA. Portanto, estude o presente capítulo cuidadosamente para não enfrentar dificuldades posteriormente.

12.2 Solução de sistemas de equações com números complexos

Dentre as formas de se resolver um sistema linear de equações cujos elementos sejam números complexos, selecionou-se dois métodos: o da igualdade e o da substituição. O método da adição, quando os números que constituem as equações do sistema são complexos, geralmente é mais difícil de ser aplicado e, por isto, é pouco utilizado e não será abordado no presente capítulo. O apoio de uma boa calculadora é importante, mas quem opera deve entender o que ela faz. Para sistemas lineares muito grandes, com quatro equações, as técnicas matriciais são mais interessantes e o uso de calculadoras mais poderosas ou aplicativos de computador que realizem inversões de matrizes são desejáveis, mas estes limites de uso são impostos pelo seu professor: respeite!

12.2.1 Método da igualdade

O método da igualdade é o mesmo tratado na seção 5.3.2 (página 79), portanto, seria conveniente que o estudante revisasse a seção citada. No método da igualdade com sistemas de equações com números complexos o procedimento não se altera, pois basta isolar a mesma variável em ambas as equações do sistema e igualá-las, como é mostrado no exemplo 12.1.

Exemplo 12.1. Calcule o valor das incógnitas nos sistemas de equações a seguir empregando o método da igualdade. Obs.: note que qualquer variável descrita neste livro com um traço acima indica que a variável é complexa, assim X é um número real e $\bar{X}$ é um número complexo.

$$(a) \begin{cases} 3\bar{I}_1 - \bar{I}_2 = -2 \\ -5\bar{I}_1 + (1 - j3)\bar{I}_2 = j5 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (3 + j5)\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -2 \\ -4\bar{x}_1 + (1 - j3)\bar{x}_2 = 3 + j2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3\angle 45^\circ \bar{A} - \bar{B} = 4 + j3 \\ -4\bar{A} + (6 + 4j)\bar{B} = 1\angle 30^\circ \end{cases}$$

Solução:

(a) Isola-se a variável $\bar{I}_1$ em ambas as equações do sistema. A primeira equação do sistema fica:

$$\begin{aligned} 3\bar{I}_1 - \bar{I}_2 &= -2 \\ 3\bar{I}_1 &= -2 + \bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \frac{-2 + \bar{I}_2}{3} \end{aligned} \quad (12.1)$$

A segunda equação do sistema fica:

$$\begin{aligned} -5\bar{I}_1 + (1 - j3)\bar{I}_2 &= j5 \\ -5\bar{I}_1 &= (j5) - (1 - j3)\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \frac{(j5) - (1 - j3)\bar{I}_2}{-5} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Agora iguala-se os valores de $\bar{I}_1$ das equações 12.1 e 12.2 e assim é encontrado o valor da variável $\bar{I}_2$, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{-2 + \bar{I}_2}{3} &= \frac{(j5) - (1 - j3)\bar{I}_2}{-5} \\ -5(-2 + \bar{I}_2) &= 3[(j5) - (1 - j3)\bar{I}_2] \\ 10 - 5\bar{I}_2 &= (j15) - (3 - j9)\bar{I}_2 \\ -5\bar{I}_2 + (3 - j9)\bar{I}_2 &= (j15) - 10 \\ (-2 - j9)\bar{I}_2 &= -10 + j15 \\ \bar{I}_2 &= \frac{-10 + j15}{-2 - j9} \\ \bar{I}_2 &= \frac{18,03\angle 123,69^\circ}{9,22\angle -102,53^\circ} \\ \bar{I}_2 &= 1,96\angle 226,22^\circ = -1,35 - j1,41 \end{aligned} \quad (12.3)$$

Para encontrar o valor de $\bar{I}_1$ pode-se substituir o valor de $\bar{I}_2$ (equação (12.3)) na equação (12.1) ou na (12.2). Escolheu-se a primeira opção pelo fato de aparentar ser necessário menos cálculos. Prosseguindo para encontrar $\bar{I}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{-2 + \bar{I}_2}{3} \\ \bar{I}_1 &= \frac{-2 + (-1,35 - j1,41)}{3} \\ \bar{I}_1 &= \frac{-3,35 - j1,41}{3} \\ \bar{I}_1 &= -1,12 - j0,47 \end{aligned}$$

Não foi exigido que as respostas fossem dadas obrigatoriamente em coordenadas retangulares ou polares, então optou-se pela primeira opção. Assim, as variáveis que são soluções do sistema são: $\bar{I}_1 = -1,12 - j0,47$ e $\bar{I}_2 = -1,35 - j1,41$.

(b) Isola-se a variável $\bar{x}_1$ em ambas as equações do sistema. A primeira equação do sistema fica:

$$\begin{aligned}(3 + j5)\bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= -2 \\ (3 + j5)\bar{x}_1 &= -2 + \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 &= \frac{-2 + \bar{x}_2}{3 + j5}\end{aligned}\quad (12.4)$$

A segunda equação do sistema fica:

$$\begin{aligned}-4\bar{x}_1 + (1 - j3)\bar{x}_2 &= 3 + j2 \\ -4\bar{x}_1 &= (3 + j2) - (1 - j3)\bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 &= \frac{(3 + j2) - (1 - j3)\bar{x}_2}{-4}\end{aligned}\quad (12.5)$$

Agora iguala-se os valores de $\bar{x}_1$ das equações (12.4) e (12.5) e encontra-se o valor da variável $\bar{x}_2$, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{-2 + \bar{x}_2}{3 + j5} &= \frac{(3 + j2) - (1 - j3)\bar{x}_2}{-4} \\ -4(-2 + \bar{x}_2) &= (3 + j5)[(3 + j2) - (1 - j3)\bar{x}_2] \\ -4(-2 + \bar{x}_2) &= (3 + j5)(3 + j2) - (3 + j5)(1 - j3)\bar{x}_2 \\ 8 - 4\bar{x}_2 &= [9 + j6 + j15 - 10] - [3 - j9 + j5 + 15]\bar{x}_2 \\ 8 - 4\bar{x}_2 &= (-1 + j21) - (18 - j4)\bar{x}_2 \\ -4\bar{x}_2 + (18 - j4)\bar{x}_2 &= (-1 + j21) - 8 \\ (14 - j4)\bar{x}_2 &= (-9 + j21) \\ \bar{x}_2 &= \frac{-9 + j21}{14 - j4} \\ \bar{x}_2 &= \frac{22,85/113,20^\circ}{14,56/-15,95^\circ} \\ \bar{x}_2 &= 1,56/129,14^\circ = -0,99 + j1,22\end{aligned}\quad (12.6)$$

Substitui-se o valor de $\bar{x}_2$ (equação (12.6)) na equação (12.4).

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{-2 + \bar{x}_2}{3 + j5} \\ \bar{x}_1 &= \frac{-2 + (-0,99 + j1,22)}{3 + j5} \\ \bar{x}_1 &= \frac{-2,99 + j1,22}{3 + j5} \\ \bar{x}_1 &= \frac{3,23/157,80^\circ}{5,83/59,04^\circ} \\ \bar{x}_1 &= 0,55/98,77^\circ = -0,08 + j0,55\end{aligned}$$

Em coordenadas polares a resposta é o par: $\bar{x}_1 = 0,55/98,77^\circ$ e $\bar{x}_2 = 1,56/129,14^\circ$.

(c) Como as operações iniciais serão de soma e subtração representa-se todos os números em coordenadas retangulares, assim:

$$3/45^\circ = 3\cos(45^\circ) + j3\sin(45^\circ) = 2,12 + j2,12$$

e

$$1\angle 30^\circ = 1 \cos(30^\circ) + j1 \sin(30^\circ) = 0,866 + j0,5$$

Com todos os números complexos representados em coordenadas retangulares, o sistema é:

$$\begin{cases} (2, 12 + j2, 12)\bar{A} - \bar{B} = 4 + j3 \\ -4\bar{A} + (6 + 4j)\bar{B} = 0,866 + j0,5 \end{cases}$$

Isola-se a incógnita $\bar{B}$ em ambas as equações que formam o sistema. Na primeira delas encontra-se:

$$\begin{aligned} (2, 12 + j2, 12)\bar{A} - \bar{B} &= 4 + j3 \\ -\bar{B} &= 4 + j3 - (2, 12 + j2, 12)\bar{A} \\ \bar{B} &= -4 - j3 + (2, 12 + j2, 12)\bar{A} \end{aligned} \quad (12.7)$$

Na segunda equação do sistema, encontra-se:

$$\begin{aligned} -4\bar{A} + (6 + 4j)\bar{B} &= 0,866 + j0,5 \\ (6 + 4j)\bar{B} &= 0,866 + j0,5 + 4\bar{A} \\ \bar{B} &= \frac{0,866 + j0,5 + 4\bar{A}}{6 + 4j} \end{aligned} \quad (12.8)$$

Igualando-se os valores de $\bar{B}$ encontrados nas equações (12.7) e (12.8) pode-se encontrar o valor de $\bar{A}$, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} -4 - j3 + (2, 12 + j2, 12)\bar{A} &= \frac{0,866 + j0,5 + 4\bar{A}}{6 + 4j} \\ (6 + 4j)[-4 - j3 + (2, 12 + j2, 12)\bar{A}] &= 0,866 + j0,5 + 4\bar{A} \\ (6 + 4j)(-4 - j3) + (6 + 4j)(2, 12 + j2, 12)\bar{A} &= 0,866 + j0,5 + 4\bar{A} \\ (7, 21\angle 33,69^\circ) \times (5\angle -143,13^\circ) + (7, 21\angle 33,69^\circ) \times (3\angle 45^\circ) \times \bar{A} &= 0,866 + j0,5 + 4\bar{A} \\ 36,05\angle -109,44^\circ + 21,63\angle 78,69^\circ \bar{A} &= 0,866 + j0,5 + 4\bar{A} \\ 21,63\angle 78,69^\circ \bar{A} - 4\bar{A} &= 0,866 + j0,5 - 36,05\angle -109,44^\circ \\ (4, 24 + j21, 21)\bar{A} - 4\bar{A} &= 0,866 + j0,5 - (-11,99 - j33,99) \\ (0, 24 + j21, 21)\bar{A} &= 12,86 + j34,49 \\ \bar{A} &= \frac{12,86 + j34,49}{0,24 + j21,21} \\ \bar{A} &= \frac{36,81\angle 69,55^\circ}{21,21\angle 89,35^\circ} \\ \bar{A} &= 1,74\angle -19,80^\circ \\ \bar{A} &= 1,63 - j0,59 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de $\bar{A}$ na equação (12.8) e fazendo os devidos cálculos, encontra-se:

$$\bar{B} = 0,72 - j0,78$$

Faça para treinar!

□

12.2.2 Método da substituição

O método da substituição é o mesmo tratado na seção 5.3.1 (página 77) e a citada seção deve ser revisada pelo estudante. O procedimento do método da substituição não se altera pelo fato dos números serem complexos, pois basta isolar uma variável em uma equação e substituí-la na outra, então o estudante deve compreender o exemplo 12.2.

Exemplo 12.2. Calcule o valor das incógnitas nos sistemas de equações a seguir empregando o método da substituição. Obs.: note que os sistemas de equações são os mesmos do exemplo 12.1 e, portanto, as respostas são as mesmas. Os cálculos não são mostrados em detalhes, pois o estudante já deve saber realizar todas as operações com números complexos com certa facilidade.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} 3\bar{I}_1 - \bar{I}_2 = -2 \\ -5\bar{I}_1 + (1 - j3)\bar{I}_2 = j5 \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} (3 + j5)\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = -2 \\ -4\bar{x}_1 + (1 - j3)\bar{x}_2 = 3 + j2 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad & \begin{cases} 3\angle 45^\circ \bar{A} - \bar{B} = 4 + j3 \\ -4\bar{A} + (6 + 4j)\bar{B} = 1\angle 30^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Solução:

- (a) Primeiramente isola-se uma das incógnitas. Escolhendo-se, por exemplo, isolar $\bar{I}_1$ na primeira equação, encontra-se:

$$\bar{I}_1 = \frac{-2 + \bar{I}_2}{3} \quad (12.9)$$

Substituindo-se $\bar{I}_1$ na segunda equação:

$$\begin{aligned} -5\bar{I}_1 + (1 - j3)\bar{I}_2 &= j5 \\ -5\left(\frac{-2 + \bar{I}_2}{3}\right) + (1 - j3)\bar{I}_2 &= j5 \end{aligned}$$

O estudante pode fazer as operações e encontrará:

$$\bar{I}_2 = -1,35 - j1,41$$

Na equação (12.9) substitui-se o valor de $\bar{I}_2$ encontrado e pode-se encontrar $\bar{I}_1$ como feito na sequência:

$$\bar{I}_1 = \frac{-2 + (-1,35 - j1,41)}{3}$$

Realizando os devidos cálculos encontra-se $\bar{I}_1 = -1,12 - j0,47$.

- (b) Pode-se isolar o valor de $\bar{x}_2$ na primeira equação do sistema. Assim tem-se:

$$\bar{x}_2 = (3 + j5)\bar{x}_1 + 2 \quad (12.10)$$

Substituindo este valor na segunda equação do sistema, encontra-se:

$$-4\bar{x}_1 + (1 - j3)[(3 + j5)\bar{x}_1 + 2] = 3 + j2$$

Efetuando-se os devidos cálculos encontra-se o valor de $\bar{x}_1$, que é:

$$\bar{x}_1 = -0,08 + j0,55$$

Substituindo o valor de $\bar{x}_1$ na equação (12.10) encontra-se o valor de $\bar{x}_2$, como mostrado a seguir:

$$\bar{x}_2 = (3 + j5)(0,053 + j0,42) + 2$$

Fazendo-se os cálculos, tem-se que:

$$\bar{x}_2 = -0,99 + j1,22$$

(c) Pode-se isolar a incógnita $\bar{A}$ na primeira equação do sistema, como feito a seguir:

$$\bar{A} = \frac{4 + j3 + \bar{B}}{3\angle 45^\circ} \quad (12.11)$$

$\bar{A}$ é substituído na segunda equação do sistema e assim encontra-se:

$$-4 \left(\frac{4 + j3 + \bar{B}}{3\angle 45^\circ} \right) + (6 + j4)\bar{B} = 1\angle 30^\circ$$

Fazendo os devidos cálculos, encontra-se:

$$\bar{B} = 0,72 - j0,78$$

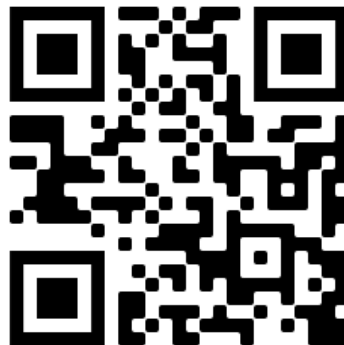
Substituindo o valor de $\bar{B}$ na equação (12.11), encontra-se:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{4 + j3 + (0,72 - j0,78)}{3\angle 45^\circ} \\ \bar{A} &= 1,63 - j0,59 \end{aligned}$$

□

Videoaula 12.1 (Solução de sistemas lineares com números complexos). Para ver exemplo de solução de sistema linear que possui números complexos acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/QkRfzUWJJJA>



12.3 Resumo do capítulo

Métodos de solução de sistemas de equações lineares com números complexos foram tratados no presente capítulo. A forma de resolver é a mesma utilizada para solucionar sistemas lineares com números reais, somente deve-se ficar atento às operações com os números complexos. Um breve resumo é feito a seguir:

- No método da igualdade deve-se isolar uma incógnita nas duas equações do sistema e igualar seu valor, assim encontra-se o valor da outra incógnita;
- No método da substituição deve-se isolar uma incógnita numa equação e substituir o valor dela na outra;

Problemas propostos

Problema 12.1. Encontre as soluções dos sistemas de equações a seguir:

$$(a) \begin{cases} 4\bar{I}_1 + 3\bar{I}_2 = 1 \\ (-5 + j3)\bar{I}_1 + j3\bar{I}_2 = 5 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2\bar{I}_1 + 7\bar{I}_2 = 10 \\ j3\bar{I}_1 + 3\bar{I}_2 = 11 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 20\bar{A}_1 + \bar{A}_2 = 1 \\ j\bar{A}_1 + 3\bar{A}_2 = 9 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 1 \\ (2 + j3)\bar{I}_1 + 3\bar{I}_2 = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} (2 + j3)\bar{V}_1 + (7 - j2)\bar{V}_2 = 0 \\ j3\bar{V}_1 + j3\bar{V}_2 = 4 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} (2 + j2)\bar{I}_1 + (7 - j2)\bar{I}_2 = 3 \\ j3\bar{I}_1 + (3 - j2)\bar{I}_2 = (2 + j4) \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} (1 - j3)\bar{X} + (2 + j3)\bar{Y} = 1 - j5 \\ j3\bar{X} + (2 + j3)\bar{Y} = 3 + j4 \end{cases}$$

Capítulo 13

Técnicas para solução de circuitos CA

13.1 Introdução

O capítulo 6 teve como destaques leis, métodos e teoremas que auxiliam os estudantes a solucionar circuitos CC mais complexos. Agora é o momento de estudar estas mesmas técnicas aplicadas aos circuitos CA. A diferença básica é que agora surgem os números complexos nas operações matemáticas, já que o conceito de fasores é aplicado na modelagem das formas de onda de tensões e correntes senoidais. Então estude com atenção para não errar os muito detalhes que são apresentados no presente capítulo.

13.2 Definições

Se o conteúdo anterior do presente livro foi compreendido, então o estudante já conhece todos os conceitos e definições necessários ao entendimento deste capítulo, porém caso não lembre deve reestudar pelo menos as seções 6.2 e 6.3 e revisar os conceitos de: nós, ramos, laços, malhas e leis de Kirchhoff. Algumas definições, por terem características particulares em circuitos elétricos alternados senoidais, são tratados novamente na presente seção.

Sentido da corrente Para ilustrar o que será dito é necessário que o estudante veja a figura 13.1.

Se a indicação da corrente feita coincide com o sentido real da corrente, então $\bar{I}_x = \bar{I} = |\bar{I}| \angle \theta_I$.

Se a indicação feita está no sentido oposto, então o fasor corrente $\bar{I}_y = -\bar{I}$ e deve-se adicionar ou subtrair 180° (a escolha é do estudante) para representar o fasor em sentido contrário, assim, $\bar{I}_y = |\bar{I}| \angle \theta_I \pm 180^\circ$. No caso do valor da corrente ser representado em coordenadas retangulares, se a indicação feita coincide com o sentido real da corrente, então $\bar{I}_x = I_a + jI_b$. Caso a indicação feita seja em sentido contrário ao sentido real, então tem-se que $\bar{I}_y = -(I_a + jI_b) = -I_a - jI_b$.

Exemplo 13.1. Considere que a corrente $\bar{I}$ da figura 13.1 possui valor de $5 \angle -25^\circ$ A e encontre:

- (a) O valor da corrente $\bar{I}_x$ em coordenadas polares;
- (b) O valor da corrente $\bar{I}_y$ em coordenadas polares;
- (c) O valor da corrente $\bar{I}_x$ em coordenadas retangulares;
- (d) O valor da corrente $\bar{I}_y$ em coordenadas retangulares;

Solução:

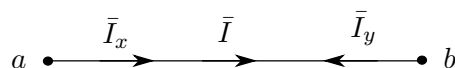


Figura 13.1: Determinação do valor do fasor corrente.

- (a) O valor da corrente $\bar{I}_x$ é idêntico ao valor de $\bar{I}$, pois o sentido indicado de $\bar{I}_x$ coincide com o de $\bar{I}$. Portanto:

$$\bar{I}_x = \bar{I} = 5\angle -25^\circ \text{ A}$$

- (b) O sentido da corrente $\bar{I}_y$ é contrário ao de $\bar{I}$, portando deve-se somar ou subtrair 180° ao ângulo de $\bar{I}$. Escolhendo a soma dos 180° , encontra-se:

$$\bar{I}_y = -\bar{I} = 5\angle -25^\circ + 180^\circ = 5\angle 155^\circ \text{ A}$$

- (c) De início encontra-se o valor de $\bar{I}$ em coordenadas retangulares, que é obtido a seguir:

$$\bar{I} = 5\angle -25^\circ = 5 \cos(-25^\circ) + j5 \sin(-25^\circ) = 4,53 - j2,11 \text{ A}$$

Como o sentido de $\bar{I}_x$ coincide com o de $\bar{I}$, então:

$$\bar{I}_x = \bar{I} = 4,53 - j2,11 \text{ A}$$

- (d) Como o sentido de $\bar{I}_y$ é o oposto ao de $\bar{I}$, então:

$$\bar{I}_y = -\bar{I} = -(4,53 - j2,11) = -4,53 + j2,11 \text{ A}$$

□

Polaridade nas fontes de tensão Segue um padrão similar ao caso das fontes de tensão contínua.

A figura 13.2 auxiliará no entendimento. Se a fonte de tensão é percorrida da polaridade + para –, então o valor da d.d.p. deve ser representado com o mesmo valor do fasor tensão $\bar{U}$. Porém, se a fonte de tensão é percorrida da polaridade – para +, então o valor da d.d.p. será $-\bar{U}$. O estudante deve avaliar a figura 13.2, pois ela exemplifica o que foi dito: mais uma vez adiciona-se $\pm 180^\circ$ ao ângulo do fasor quando se tem um sinal negativo em frente a ele. Na referida figura fez-se a escolha por somar 180° .

Polaridade da d.d.p. em impedâncias O fasor tensão nos terminais das impedâncias depende de como ela é percorrida e do sentido da corrente que a atravessa. Para identificar a polaridade deve-se indicar a polaridade + no terminal da impedância em que a corrente entra e a polaridade – no terminal no qual a corrente sai. A d.d.p. é $+\mathbf{Z}\bar{I}$ se a impedância é percorrida do terminal de polaridade + para o de polaridade – (ver figuras 13.3(a) e 13.3(d)) e é $-\mathbf{Z}\bar{I}$ se a impedância é percorrida do terminal de polaridade – para o de polaridade + (ver figuras 13.3(b) e 13.3(c)).

13.3 Leis de Kirchhoff

As leis de Kirchhoff apresentadas na seção 6.3 são válidas também para os circuitos CA, bastando operar os sinais alternados da forma correta. A técnica habitual é usar os fasores complexos para representação das tensões e correntes alternadas do circuito e impedâncias para representar os elementos passivos. A descrição de como aplicar as leis de Kirchhoff é apresentada na sequência.

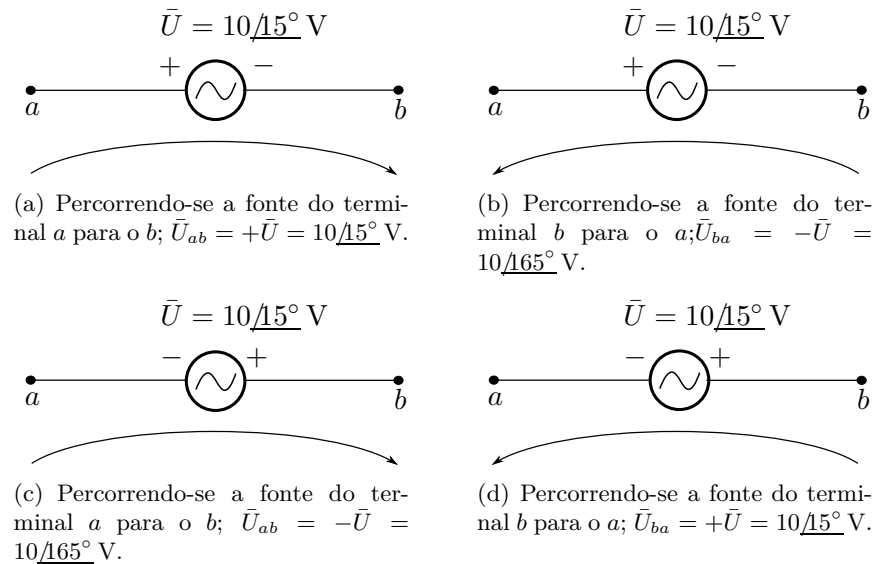


Figura 13.2: Determinação do sinal da d.d.p. nas fontes de tensão a depender de como as mesmas são percorridas.

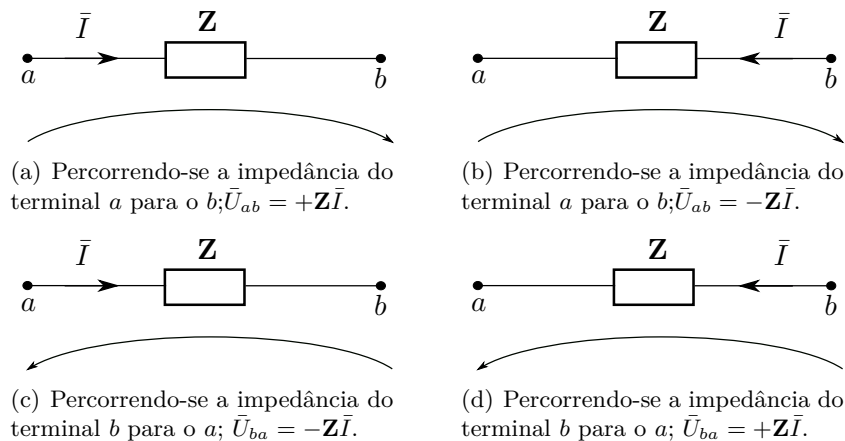


Figura 13.3: Avaliação do sinal da d.d.p. nas impedâncias a depender da indicação da corrente e de como as impedâncias são percorridas.

Primeira lei de Kirchhoff ou lei das correntes Diz que a soma das correntes que entram em um nó é igual a soma das correntes que saem deste mesmo nó. Saliente-se que as operações devem ser feitas com os fasores, não se pode, portanto, esquecer o ângulo (quando a representação for polar) ou a parte imaginária (quando a representação for retangular), como mostrado no exemplo 13.2.

Exemplo 13.2. Qual o valor da corrente $\bar{I}$ indicada nos circuitos elétricos mostrados na figura 13.4?

Solução:

O estudante deve lembrar que em circuitos elétricos cujas tensões e correntes sejam senoidais, os seus valores são definidos por um módulo e um ângulo (no caso da representação ser feita em coordenadas polares) ou por uma parte real e outra imaginária (no caso da representação ser feita em coordenadas retangulares). Portanto, espera-se que a resposta seja um fasor corrente, ou seja, um número complexo.

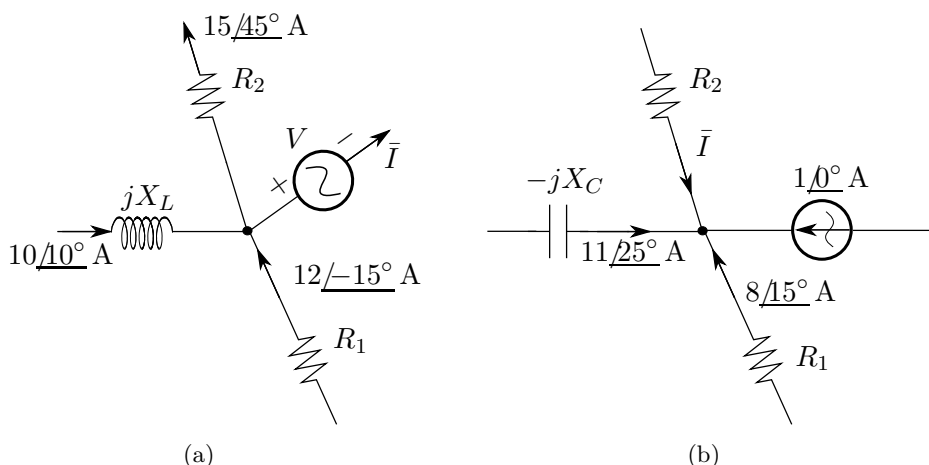


Figura 13.4: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 13.2.

Para solucionar a questão, basta aplicar a lei das correntes de Kirchhoff e o valor de $\bar{I}$ para o circuito mostrado na figura 13.4(a) é encontrado pela expressão a seguir:

$$\underbrace{10\angle 10^\circ + 12\angle -15^\circ}_{\text{Correntes que entram}} = \underbrace{15\angle 45^\circ + \bar{I}}_{\text{Correntes que saem}}$$

Transformando todos os valores da equação anterior para coordenadas retangulares, tem-se:

$$\begin{aligned} [10 \cos(10^\circ) + j10 \sin(10^\circ)] + [12 \cos(-15^\circ) + j12 \sin(-15^\circ)] &= [15 \cos(45^\circ) + j15 \sin(45^\circ)] + \bar{I} \\ (9,85 + j1,74) + (11,59 - j3,11) &= (10,61 + j10,61) + \bar{I} \\ \bar{I} &= (9,85 + j1,74) + (11,59 - j3,11) - (10,61 + j10,61) \\ \bar{I} &= 10,83 - j11,98 \text{ A} \\ \bar{I} &= 16,15\angle -47,87^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Para o circuito da figura 13.4(b) o valor da corrente $\bar{I}$ pode ser encontrado a partir da expressão:

$$\underbrace{11\angle 25^\circ + 8\angle 15^\circ + 1\angle 0^\circ}_{\text{Correntes que entram}} + \bar{I} = \underbrace{0}_{\text{Corrente que sai}}$$

Transformando todos os valores da equação anterior para coordenadas retangulares, tem-se:

$$\begin{aligned} [11 \cos(25^\circ) + j11 \sin(25^\circ)] + [8 \cos(15^\circ) + j8 \sin(15^\circ)] + [1 \cos(0^\circ) + j1 \sin(0^\circ)] + \bar{I} &= 0 \\ (9,97 + j4,65) + (7,73 + j2,07) + (1) + \bar{I} &= 0 \\ \bar{I} &= -(9,97 + j4,65) - (7,73 + j2,07) - (1) \\ \bar{I} &= -18,67 - j6,72 \text{ A} \\ \bar{I} &= 19,87\angle -160,23^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Obviamente o fasor $1\angle 0^\circ \text{ A}$ pode ser escrito como 1 A , mas foi mantida a forma completa com o ângulo para fins didáticos. Com o passar do tempo o normal é escrever da forma mais compacta não escrevendo o ângulo quando ele for zero.

□

Segunda lei de Kirchhoff ou lei das malhas Diz que a soma das d.d.p. de cada ramo que constitui um laço (ou no caso em estudo, uma malha) quando este é completamente percorrida em um sentido é igual a zero. Saliente-se que as operações se dão com fasores e, portanto, são operações com números complexos, como mostrado no exemplo 13.3.

Exemplo 13.3. Calcule o valor das correntes dos circuitos mostrados na figura 13.5.

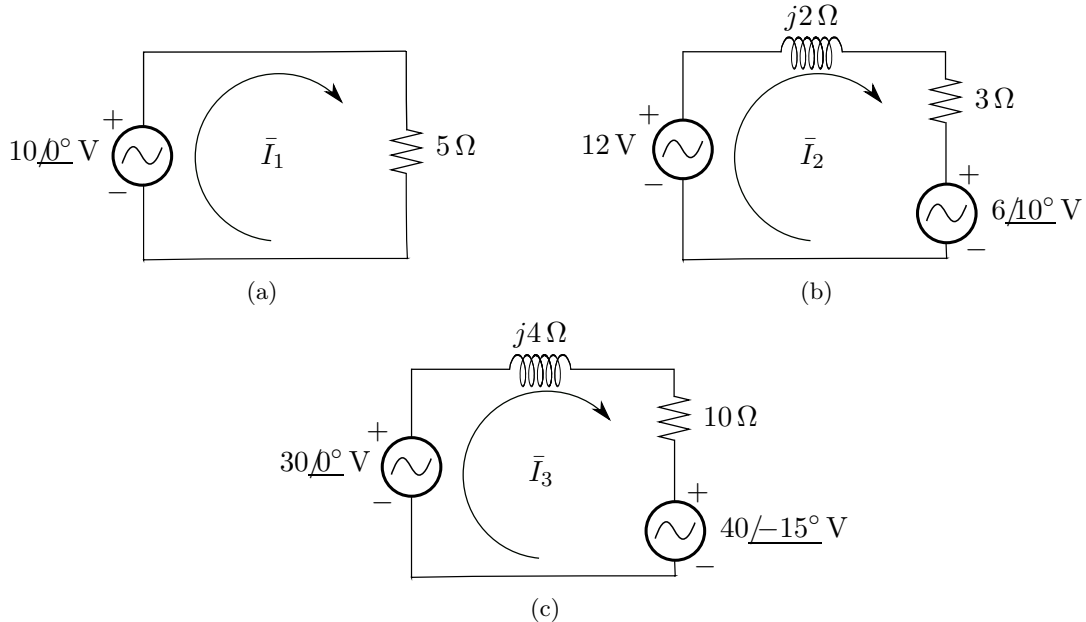


Figura 13.5: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 13.3.

Solução:

Empregando a lei das tensões de Kirchhoff resolve-se esta questão. Para o circuito da figura 13.5(a), encontra-se:

$$\begin{aligned} -10\angle 0^\circ + 5\bar{I}_1 &= 0 \\ 5\bar{I}_1 &= 10\angle 0^\circ \\ \bar{I}_1 &= \frac{10\angle 0^\circ}{5} \\ \bar{I}_1 &= 2\angle 0^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Para o circuito da figura 13.5(b) encontra-se:

$$\begin{aligned} -12\angle 0^\circ + j2\bar{I}_2 + 3\bar{I}_2 + 6\angle 10^\circ &= 0 \\ j2\bar{I}_2 + 3\bar{I}_2 &= 12\angle 0^\circ - 6\angle 10^\circ \\ \bar{I}_2(3 + j2) &= [12 \cos(0^\circ) + j12 \sin(0^\circ)] - [6 \cos(10^\circ) + j6 \sin(10^\circ)] \\ \bar{I}_2(3 + j2) &= 12 - (5,91 + j1,04) \\ \bar{I}_2(3 + j2) &= 6,09 - j1,04 \\ \bar{I}_2 &= \frac{6,09 - j1,04}{3 + j2} \\ \bar{I}_2 &= \frac{6,18\angle -9,69^\circ}{3,61\angle 33,69^\circ} \\ \bar{I}_2 &= 1,71\angle -43,38^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Para o circuito da figura 13.5(c), encontra-se:

$$\begin{aligned}
 -30\angle 0^\circ + j4\bar{I}_3 + 10\bar{I}_3 + 40\angle -15^\circ &= 0 \\
 j4\bar{I}_3 + 10\bar{I}_3 &= 30\angle 0^\circ - 40\angle -15^\circ \\
 \bar{I}_3(10 + j4) &= [30\cos(0^\circ) + j30\sin(0^\circ)] - [40\cos(-15^\circ) + j40\sin(-15^\circ)] \\
 \bar{I}_3(10 + j4) &= 30 - (38,64 - j10,35) \\
 \bar{I}_3(10 + j4) &= -8,64 + j10,35 \\
 \bar{I}_3 &= \frac{-8,64 + j10,35}{10 + j4} \\
 \bar{I}_3 &= \frac{13,48\angle 129,84^\circ}{10,77\angle 21,8^\circ} \\
 \bar{I}_3 &= 1,25\angle 108,04^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

Saliente-se que qualquer número complexo na forma $|\bar{x}|\angle 0^\circ$ pode ser escrito como $|\bar{x}|$. No presente exemplo foi mantida a forma completa com o ângulo para fins didáticos. Com o passar do tempo o estudante deve escrever da forma mais compacta não escrevendo o ângulo quando ele for zero.

□

Videoaula 13.1 (Leis de Kirchhoff - circuitos CA). Para mais detalhes de como utilizar as 1ª e 2ª leis de Kirchhoff com tensões e correntes representadas por fasores acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/wMZHmes9Zxs>



13.4 Análise de malhas

A maior diferença da análise de malhas dos circuitos CC para os CA é que neste último caso, deve-se tratar estas grandezas elétricas como fasores. Portanto, o estudante deve reestudar a seção 6.4, dando especial atenção aos exemplos, assim entenderá melhor o exemplo 13.4 a seguir. Mas só um lembrete: no método de análise de malhas escreve-se a equação de tensão para cada malha, organiza-se o sistema de equações e a solução deste dá como respostas as correntes de malha. O sentido das correntes (na qual as malhas serão percorridas) pode ser escolhido aleatoriamente pelo estudante.

Exemplo 13.4. Calcule os valores das correntes $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ e $\bar{I}_w$ indicadas no circuito da figura 13.6(a). Conforme indicam as barras sobre as indicações de correntes são desejados os fasores correntes. Deseja-se as respostas na representação polar.

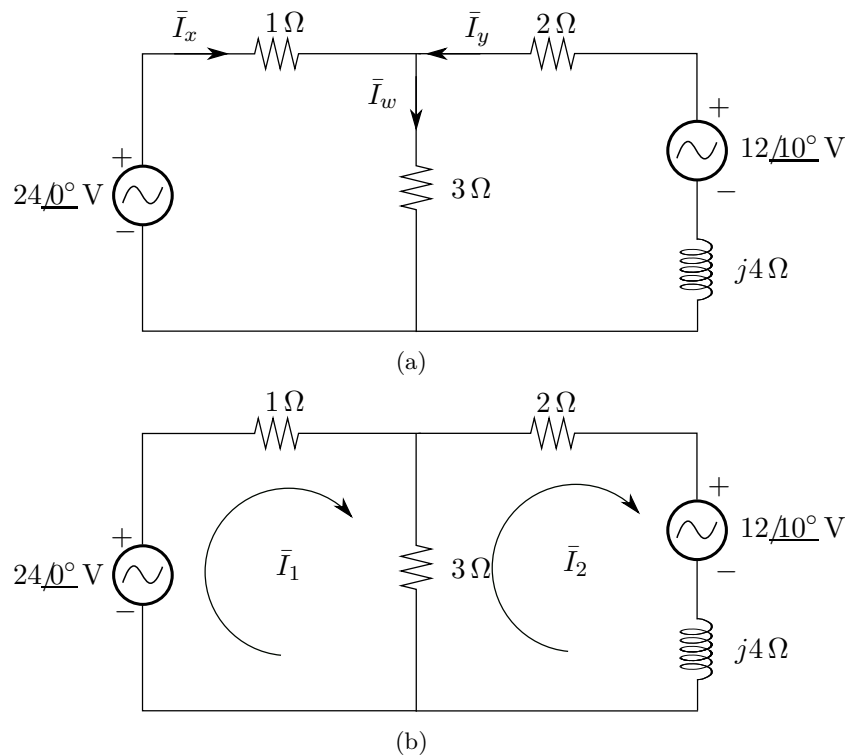


Figura 13.6: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 13.4.

Solução:

1. O primeiro passo é identificar as malhas e as correntes circulantes em cada uma delas. A escolha do sentido da corrente fica por conta do estudante. Escolhendo-se o sentido horário para $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$, como é mostrado no circuito da figura 13.6(b), passa-se ao segundo passo.
2. Agora deve-se escrever as equações de tensões para cada malha. Para isso será utilizada a lei das tensões de Kirchhoff. As equações de tensão para cada malha podem ter todos os números complexos representados na forma retangular, para facilitar as primeiras operações de soma e subtração da solução do sistema de equações. Para a malha 1, encontra-se:

$$\begin{aligned}
 -24\angle 0^\circ + 1\bar{I}_1 + 3(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) &= 0 \\
 -24\angle 0^\circ + \bar{I}_1 + 3\bar{I}_1 - 3\bar{I}_2 &= 0 \\
 -24 + \bar{I}_1 + 3\bar{I}_1 - 3\bar{I}_2 &= 0 \\
 \bar{I}_1 + 3\bar{I}_1 - 3\bar{I}_2 &= 24 \\
 4\bar{I}_1 - 3\bar{I}_2 &= 24
 \end{aligned} \tag{13.1}$$

A equação de tensão para a malha 2 é:

$$\begin{aligned}
 +12\angle 10^\circ + j4\bar{I}_2 + 3(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) + 2\bar{I}_2 &= 0 \\
 12\angle 10^\circ + j4\bar{I}_2 + 3\bar{I}_2 - 3\bar{I}_1 + 2\bar{I}_2 &= 0 \\
 [12 \cos(10^\circ) + j12 \sin(10^\circ)] + j4\bar{I}_2 + 3\bar{I}_2 - 3\bar{I}_1 + 2\bar{I}_2 &= 0 \\
 (11,82 + j2,08) + j4\bar{I}_2 + 3\bar{I}_2 - 3\bar{I}_1 + 2\bar{I}_2 &= 0 \\
 (11,82 + j2,08) - 3\bar{I}_1 + (5 + j4)\bar{I}_2 &= 0 \\
 3\bar{I}_1 - (5 + j4)\bar{I}_2 &= 11,82 + j2,08
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

3. As equações (13.1) e (13.2) formam um sistema de equações, que pode ser organizado como:

$$\begin{cases} 4\bar{I}_1 - 3\bar{I}_2 = 24 \\ 3\bar{I}_1 - (5 + j4)\bar{I}_2 = 11,82 + j2,08 \end{cases} \quad (13.3)$$

4. Encontra-se a solução de um sistema linear de equações com números complexos usando o método da igualdade. Isolando $\bar{I}_1$ na primeira expressão da equação (13.3):

$$\begin{aligned} 4\bar{I}_1 - 3\bar{I}_2 &= 24 \\ 4\bar{I}_1 &= 3\bar{I}_2 + 24 \\ \bar{I}_1 &= \frac{3\bar{I}_2 + 24}{4} \end{aligned} \quad (13.4)$$

Isolando $\bar{I}_1$ na segunda expressão da equação (13.3):

$$\begin{aligned} 3\bar{I}_1 - (5 + j4)\bar{I}_2 &= 11,82 + j2,08 \\ 3\bar{I}_1 &= 11,82 + j2,08 + (5 + j4)\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \frac{11,82 + j2,08 + (5 + j4)\bar{I}_2}{3} \end{aligned} \quad (13.5)$$

Igualando os valores de $\bar{I}_1$ nas equações (13.4) e (13.5), pode-se finalmente encontrar o valor de $\bar{I}_2$, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{3\bar{I}_2 + 24}{4} &= \frac{11,82 + j2,08 + (5 + j4)\bar{I}_2}{3} \\ 3(3\bar{I}_2 + 24) &= 4[11,82 + j2,08 + (5 + j4)\bar{I}_2] \\ 9\bar{I}_2 + 72 &= 47,28 + j8,32 + (20 + j16)\bar{I}_2 \\ 9\bar{I}_2 - (20 + j16)\bar{I}_2 &= 47,28 + j8,32 - 72 \\ (-11 - j16)\bar{I}_2 &= 47,28 + j8,32 - 72 \\ (-11 - j16)\bar{I}_2 &= -24,72 + j8,32 \\ \bar{I}_2 &= \frac{-24,72 + j8,32}{(-11 - j16)} \\ \bar{I}_2 &= \frac{26,08 \angle 161,40^\circ}{19,42 \angle -124,51^\circ} \\ \bar{I}_2 &= 1,343 \angle 285,91^\circ \text{ A} \end{aligned} \quad (13.6)$$

O valor de $\bar{I}_2$ pode ser substituído na equação (13.4) ou na equação (13.5) e assim encontra-se o valor de $\bar{I}_1$. Uma simples olhada em ambas evidencia que é mais conveniente que se escolha a equação (13.4), pois dessa maneira menos cálculos são necessários. $\bar{I}_1$ é encontrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= \frac{3\bar{I}_2 + 24}{4} \\
\bar{I}_1 &= \frac{3(1,343/\underline{285,91^\circ}) + 24}{4} \\
\bar{I}_1 &= \frac{(4,029/\underline{285,91^\circ}) + 24}{4} \\
\bar{I}_1 &= \frac{[4,029 \cos(285,91^\circ) + j4,029 \sin(285,91^\circ)] + 24}{4} \\
\bar{I}_1 &= \frac{(1,104 - j3,875) + 24}{4} \\
\bar{I}_1 &= \frac{25,104 - j3,875}{4} \\
\bar{I}_1 &= \frac{25,402/\underline{-8,77^\circ}}{4} \\
\bar{I}_1 &= 6,35/\underline{-8,77^\circ} \text{ A}
\end{aligned} \tag{13.7}$$

Foi solicitado que fossem encontrados os valores das correntes em 3 ramos do circuito. Observando os circuitos elétricos mostrados nas figuras 13.6(a) e 13.6(b) é possível notar que:

$$\bar{I}_x = \bar{I}_1 = 6,35/\underline{-8,77^\circ} \text{ A}$$

Além do mais:

$$\bar{I}_y = -\bar{I}_2 = -1,343/\underline{285,91^\circ} = 1,343/\underline{105,91^\circ} \text{ A}$$

Nesta última equação é importante lembrar que o negativo de um fasor pode ser obtido adicionando $\pm 180^\circ$. No presente caso foi feita a subtração de 180° .

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_w &= \bar{I}_1 - \bar{I}_2 \\
\bar{I}_w &= 6,35/\underline{-8,77^\circ} - 1,343/\underline{285,91^\circ} \\
\bar{I}_w &= (6,276 - j0,969) - (0,368 - j1,292) \\
\bar{I}_w &= 5,908 + j0,323 \text{ A} \\
\bar{I}_w &= 5,91/\underline{3,13^\circ} \text{ A}
\end{aligned}$$

□

13.4.1 Análise de malhas com fontes de corrente

No caso de existir uma fonte de corrente o cenário pode ficar mais simples, pois a corrente na malha poderá ser identificada por inspeção, já que a corrente imposta pela fonte é a própria corrente da malha. O exemplo 13.5 auxilia no entendimento do que foi dito. Um caso particular é quando a fonte de corrente está entre duas malhas: neste caso será usado o conceito de supermalha a ser visto para o caso CA na seção 13.4.2.

Exemplo 13.5. Calcule o valor da corrente $\bar{I}_x$ indicada no circuito da figura 13.7.

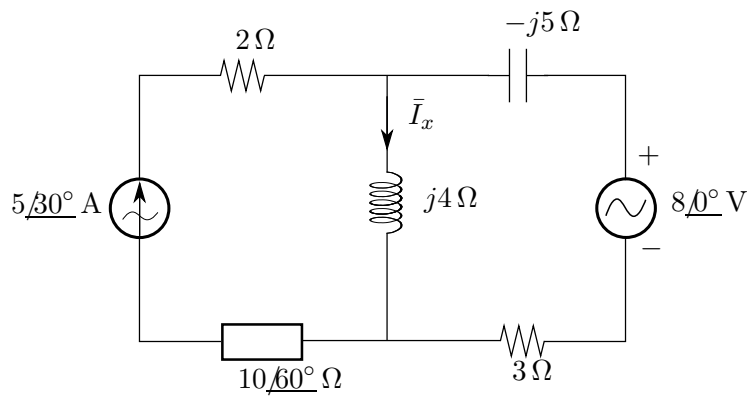


Figura 13.7: Circuito elétrico relativo ao exemplo 13.5.

Solução:

O circuito deste exemplo possui duas malhas. Aquela à esquerda será chamada de malha 1 e aquela à direita de malha 2. No decorrer da solução, na aplicação da lei das tensões de Kirchhoff, considera-se que ambas as malhas são percorridas no sentido horário.

Da análise da malha 1 pode-se concluir que:

$$\bar{I}_1 = 5\angle 30^\circ \text{ A}$$

ou, em coordenadas retangulares:

$$\bar{I}_1 = 4,33 + j2,5 \text{ A}$$

Empregando a lei das tensões de Kirchhoff na malha 2, encontra-se:

$$-j5\bar{I}_2 + 8\angle 0^\circ + 3\bar{I}_2 + j4(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) = 0$$

Realizando as contas adequadas para organizar melhor a equação anterior, encontra-se:

$$-j4\bar{I}_1 + (3 - j)\bar{I}_2 = -8$$

Para se encontrar o valor de $\bar{I}_2$ pode-se utilizar o método da substituição, pois o valor de $\bar{I}_1$ foi encontrado anteriormente. Tem-se assim:

$$\begin{aligned} -j4\bar{I}_1 + (3 - j)\bar{I}_2 &= -8 \\ -j4 \times (4,33 + j2,5) + (3 - j)\bar{I}_2 &= -8 \\ -j17,32 + 10 + (3 - j)\bar{I}_2 &= -8 \\ (3 - j)\bar{I}_2 &= -8 - 10 + j17,32 \\ (3 - j)\bar{I}_2 &= -18 + j17,32 \\ \bar{I}_2 &= \frac{-18 + j17,32}{3 - j} \end{aligned}$$

Que resulta em:

$$\bar{I}_2 = 7,9\angle 154,54^\circ \text{ A}$$

cujo valor em coordenadas retangulares é:

$$\bar{I}_2 = -7,13 + j3,4 \text{ A}$$

Do circuito mostrado na figura 13.7 vê-se que o valor da corrente $\bar{I}_x$ é:

$$\begin{aligned} \bar{I}_x &= \bar{I}_1 - \bar{I}_2 \\ \bar{I}_x &= (4,33 + j2,5) - (-7,13 + j3,4) \\ \bar{I}_x &= 11,46 - j0,9 \\ \bar{I}_x &= 11,5\angle -4,47^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

□

Videoaula 13.2 (Sobre o método análise de malhas em circuitos CA). Para mais detalhes sobre a técnica de análise de malhas em circuitos CA acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/-DYG0xBgPcU>



13.4.2 Supermalha

O conceito de *supermalha* foi explicado na seção 6.4.3, mas neste momento do curso é necessário revê-lo, pois nas aplicações em CA surgem os números complexos dos fasores tensão e corrente, além das impedâncias. Porém o conceito de supermalha não se altera: quando há uma fonte de corrente entre duas malhas não há como definir a tensão nos terminais da fonte e por isto se suprime a fonte criando uma malha ainda maior chamada de supermalha. Outra equação é obtida via lei de Kirchhoff das correntes. O uso da supermalha fica mais claro com os procedimento e exemplo que são apresentados na sequência.

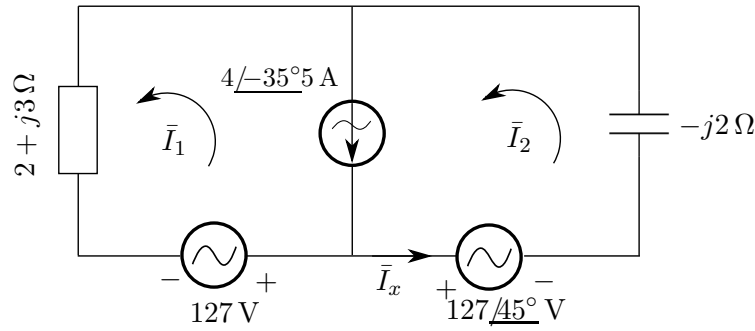
Procedimento para uso do conceito de supermalha:

1. Identificar as correntes de malha do circuito e seus sentidos (escolhe-se o sentido que quiser, podendo inclusive selecionar sentidos diferentes entre as malhas);
2. Retirar a fonte de corrente entre duas malhas e seus elementos em série da ilustração do circuito;
3. Aplicar a lei de Kirchhoff das tensões na supermalha e demais malhas do circuito;
4. Aplicar a lei de Kirchhoff das correntes num dos nós que se relacione com os elementos retirados na ilustração no primeiro passo. É necessário rever o circuito original sem a retirada do trecho que criou a supermalha;
5. Resolver as equações e encontrar as correntes do circuito.

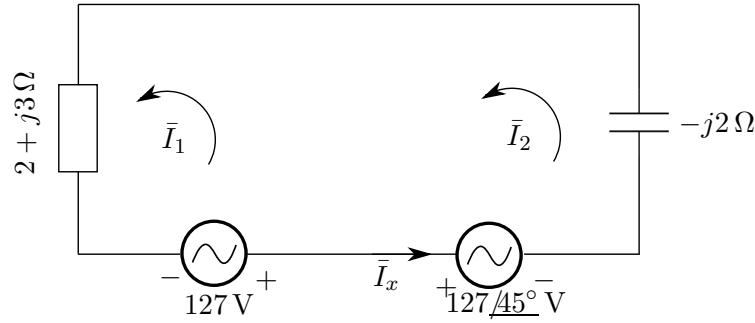
Exemplo 13.6. Calcule o fasor corrente $\bar{I}_x$ indicada no circuito mostrado na figura 13.8(a). Resolva o problema considerando os sentidos das correntes de malha $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ já indicados no referido circuito.

Solução:

Seguindo as cinco etapas descritas anteriormente:



(a) Circuito original com identificação de correntes de malha.



(b) Circuito após a identificação da supermalha.

Figura 13.8: Ilustração referente ao exemplo 13.6.

1. No próprio circuito original (ver figura 13.8(a)) já foram estabelecidos os sentidos das correntes das malhas um e dois.
2. Com a retirada da fonte de corrente comum às duas malhas o circuito se torna o ilustrado na figura 13.8(b).
3. O circuito simplificado tem só a supermalha, então a equação de tensão é:

$$\begin{aligned}
 (2 + j3)\bar{I}_1 - 127 + 127/45^\circ - j2\bar{I}_2 &= 0 \\
 (2 + j3)\bar{I}_1 - 127 + (89,8 + j89,8) - j2\bar{I}_2 &= 0 \\
 (2 + j3)\bar{I}_1 - 37,2 + j89,8 - j2\bar{I}_2 &= 0 \\
 (2 + j3)\bar{I}_1 - j2\bar{I}_2 &= 37,2 - j89,8
 \end{aligned} \tag{13.8}$$

Não há outra malha no circuito, mas caso houvesse as equações de tensão deveriam ser escritas.

4. Deve-se encontrar a segunda equação utilizando lei de Kirchhoff das correntes de um dos nós que possuem o trecho retirado do circuito. Por exemplo, o nó acima da fonte de $4/35^\circ$ A (veja novamente o circuito original da figura 13.8(a)):

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_2 &= \bar{I}_1 + 4/35^\circ \\
 \bar{I}_1 - \bar{I}_2 &= -4/35^\circ \\
 \bar{I}_1 - \bar{I}_2 &= 4/145^\circ \\
 \bar{I}_1 - \bar{I}_2 &= -3,28 + j2,29
 \end{aligned} \tag{13.9}$$

5. O último passo é resolver o sistema formado pelas equações 13.8 e 13.9. Como foi pedida a corrente $\bar{I}_x$ (releia o enunciado), então bastaria encontrar o valor de $\bar{I}_2$, pois $\bar{I}_x = \bar{I}_2$. Os fasores correntes de malha são: $\bar{I}_1 = 34,68/-155,11^\circ$ A e $\bar{I}_2 = 32,85/149,08^\circ$ A (faça os cálculos). A resposta solicitada é:

$$\bar{I}_x = \bar{I}_2 = 32,85/149,08^\circ \text{ A}$$

□

Videoaula 13.3 (Técnica da supermalha em circuitos CA). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de malhas quando é necessário utilizar o conceito de supermalha em circuitos CA acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/AmbgHtr2qkQ>



13.4.3 Análise de malhas por inspeção

Assim como explicado nas discussões sobre circuitos CC, é possível utilizar o mesmo método para montagem de uma equação matricial para circuitos que possuam apenas fontes de tensão não controladas. Note que esta técnica que se está apresentando agora em circuitos é também utilizada nos estudos de disciplinas mais avançadas, como, por exemplo, sistemas elétricos de potência (SEP); caso este conteúdo seja cobrado na sua disciplina de circuitos elétricos é bom que preste atenção e aprenda, pois no futuro serão trocados apenas nomes e definições, mas o método será o mesmo.

Deve-se escrever um sistema matricial com a seguinte forma:

$$\mathbf{Z}\bar{\mathbf{I}} = \bar{\mathbf{U}} \quad (13.10)$$

As indicações em negrito servem para indicar que se trata de matrizes ou vetores. Na equação (13.10) tem-se:

- $\mathbf{Z}$ representando a matriz impedância;
- $\bar{\mathbf{I}}$ representando o vetor de correntes de malha;
- $\bar{\mathbf{U}}$ representando o vetor de tensões.

Tendo eles os seguintes formatos:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} & \cdots & \mathbf{Z}_{1N} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} & \cdots & \mathbf{Z}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_{N1} & \mathbf{Z}_{N2} & \cdots & \mathbf{Z}_{NN} \end{bmatrix} \quad (13.11)$$

Sendo os elementos da diagonal principal a soma das impedâncias de cada uma das malhas (por exemplo, $\mathbf{Z}_{33}$ é o somatório dos valores de todas as impedâncias da malha 3) e os elementos fora da

diagonal são os opostos (sinal trocado) de cada um dos elementos que estão presente entre as malhas (por exemplo, $\mathbf{Z}_{13}$ é o oposto da impedância comum às malhas 1 e 3);

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_N \end{bmatrix} \quad (13.12)$$

é o vetor com as correntes de malha que se deseja encontrar;

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_N \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

é o vetor cujos valores correspondem ao oposto da soma da tensão das fontes de tensão de cada uma das malhas.

A solução para este problema é facilmente encontrado realizando a operação matricial a seguir:

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}^{-1} \bar{\mathbf{U}} \quad (13.14)$$

Muita atenção: para que este método possa ser aplicado todas as correntes devem ser indicadas em um único sentido (horário ou anti-horário). No exemplo a seguir e na videoaula 13.4 o sentido horário foi escolhido.

Exemplo 13.7. Encontre as correntes $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ indicadas na figura 13.6(a) do exemplo 13.4 utilizando como método de solução de circuitos a análise de malhas por inspeção.

Solução:

Para esta solução será chamada de malha um aquela à esquerda e de malha dois aquela à direita. Primeiramente será encontrada a matriz impedância, que seguindo as orientações já descritas na presente seção é:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (1+3) & -(3) \\ -(3) & (2+3+j4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & (5+j4) \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

Encontra-se agora o vetor de tensões, somando as tensões das fontes: na presente solução é adotado como critério o valor positivo da tensão quando a fonte é percorrida no sentido da queda de tensão (do + para o -), então é necessário fazer o negativo desta soma. Seguindo na busca pelo vetor tensão (lembre-se que ambos os sentidos de correntes são horários!):

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} -(-24\angle 0^\circ) \\ -(12\angle 10^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 12\angle -170^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -11,82 - j2,08 \end{bmatrix} \quad (13.16)$$

Encontrar as correntes $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$ ficou fácil, desde que se saiba a álgebra matricial ou operar corretamente algum *software* que faça os cálculos a seguir:

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}^{-1} \bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & (5+j4) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 24 \\ -11,82 - j2,08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,35\angle -8,77^\circ \\ 1,343\angle 285,91^\circ \end{bmatrix} \quad (13.17)$$

Compare estes valores com os encontrados no exemplo 13.4 e verá que são idênticos.

□

Videoaula 13.4 (Análise de malhas por inspeção em circuitos CA). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de malhas por inspeção, com exemplo, acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/4qzKe0KjATI>



13.5 Análise de nós

A técnica de análise nodal aplicada em circuitos CC já foi apresentada na seção 6.5. Na presente seção serão brevemente apresentadas as etapas do uso da técnica, pois a única diferença no caso dos circuitos CA é a existência dos números complexos nas operações matemáticas.

As etapas para aplicação da análise nodal são:

1. Deve-se selecionar um dos N nós do circuito para ser o de referência e atribuir tensões $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_{N-1}$ aos $N - 1$ restantes;
2. Aplicar a lei de Kirchhoff das correntes para cada um dos $N - 1$ nós que não sejam o de referência. Deve-se ter em mente que quando houver somente uma fonte de tensão entre um nó e o de referência, a tensão deste nó ao de referência já é a tensão da referida fonte;
3. Organizar e resolver o sistema de equações lineares que surgir das $N - 1$ equações obtidas.

Exemplo 13.8. Calcule, utilizando a técnica de análise nodal, a tensão $\bar{U}_x$ indicada no circuito mostrado na figura 13.9(a).

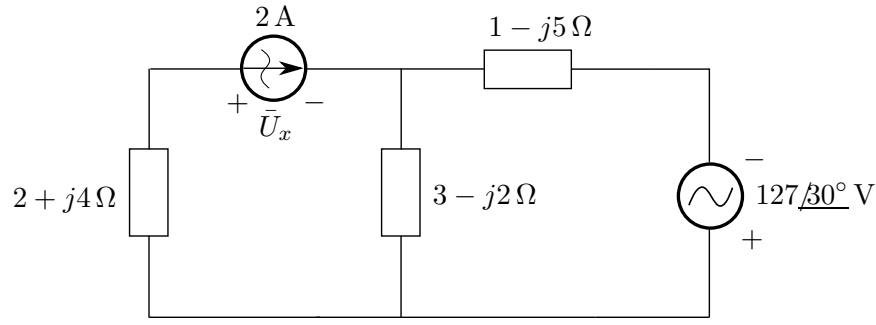
Solução:

Seguindo as etapas descritas anteriormente para sistematização da análise nodal:

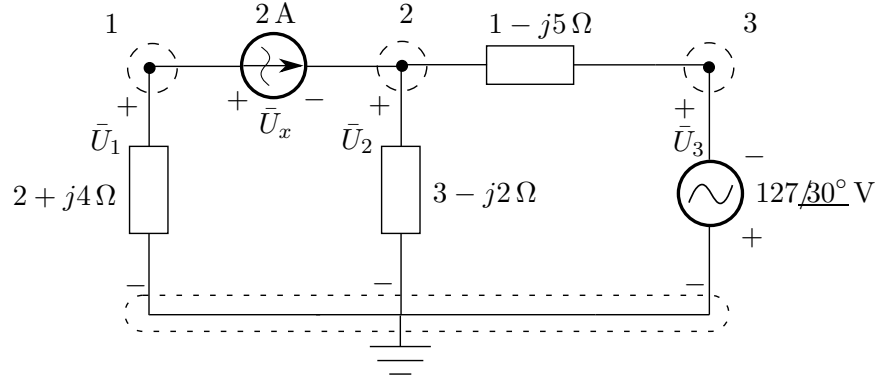
1. A indicação do nó de referência é feita na figura 13.9(b) pelo símbolo comumente utilizado para indicar aterramento, porém, neste caso, ele indica apenas que este nó é o de referência. Na mesma figura citada encontram-se também as indicações dos demais nós (1, 2 e 3) e as tensões destes nós em relação ao de referência ($\bar{U}_1, \bar{U}_2$ e $\bar{U}_3$).
2. Utiliza-se nesta etapa a lei de Kirchhoff das correntes em cada um dos nós. Neste caso à esquerda de cada uma das igualdades estarão as correntes que entram no nó e à direita da igualdade as correntes que saem. Para o nó um:

$$\frac{\bar{U}_1}{(2 + j4)} = 2$$

$$\bar{U}_1 = (4 + j8) \text{ V} = 8,94 \angle 63,4^\circ \text{ V} \quad (13.18)$$



(a) Circuito original.



(b) Circuito após a identificação dos nós e tensões de nós.

Figura 13.9: Ilustração referente ao exemplo 13.8.

Para o nó dois:

$$\begin{aligned}
 2 &= \frac{\bar{U}_2}{(3 - j2)} + \frac{(\bar{U}_2 - \bar{U}_3)}{(1 - j5)} \\
 \frac{2(3 - j2)(1 - j5)}{(3 - j2)(1 - j5)} &= \frac{(1 - j5)\bar{U}_2 + (3 - j2)(\bar{U}_2 - \bar{U}_3)}{(3 - j2)(1 - j5)} \\
 (4 - j7)\bar{U}_2 - (3 - j2)\bar{U}_3 &= -14 - j34
 \end{aligned} \tag{13.19}$$

Para o nó três o cenário é bem simples, pois entre ele e o nó de referência há uma fonte de tensão, portanto:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_3 &= -(127\angle 30^\circ) \\
 \bar{U}_3 &= 127\angle -150^\circ \text{ V}
 \end{aligned} \tag{13.20}$$

3. Três nós e três equações foram obtidas, mas neste caso duas tensões ($\bar{U}_1$ e $\bar{U}_3$) foram obtidas já na etapa de desenvolvimento das equações de nós. Restava apenas o cálculo da tensão referente ao nó dois e isto pode ser feito organizando melhor a equação (13.19) (isolando $\bar{U}_2$) e substituindo o valor encontrado na equação (13.20). Tudo isto é feito na sequência:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_2 &= \frac{(-14 - j34) + (3 - j2)\bar{U}_3}{(4 - j7)} \\
 \bar{U}_2 &= \frac{(-14 - j34) + (3 - j2)(127\angle -150^\circ)}{(4 - j7)} \\
 \bar{U}_2 &\approx -28,5 - j51 \text{ V} = 58,42\angle -119,2^\circ \text{ V}
 \end{aligned} \tag{13.21}$$

O enunciado não solicita que se encontre as tensões de nós e sim a d.d.p. nos terminais da fonte de corrente (releia o enunciado). Este valor é encontrado a seguir:

$$\begin{aligned}\bar{U}_x &= \bar{U}_1 - \bar{U}_2 \\ \bar{U}_x &= (4 + j8) - (-28,5 - j51) \\ \bar{U}_x &= 32,5 + j59 \text{ V} = 67,36 \angle 61,2^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

□

Videoaula 13.5 (Análise de nós em circuitos CA). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de nós em circuitos CA acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/5l4Ck6TBaII>



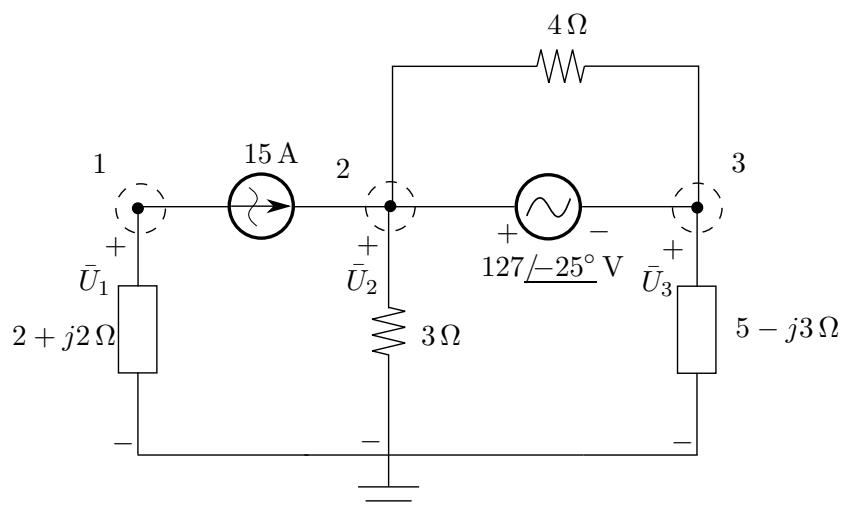
13.5.1 Supernó

O supernó é um cenário particular já explicado na seção 6.5.1 para o caso de circuitos CC. O conceito é o mesmo: quando há uma fonte de tensão entre dois nós é impossível determinar sua corrente com base somente na sua tensão, pois esta é constante seja qual for o valor da corrente que circule pela fonte. Apela-se para o supernó, no qual a fonte de tensão e todos os seus elementos em paralelo são suprimidos e posteriormente uma equação adicional é encontrada empregando a lei de Kirchhoff das correntes. Siga o procedimento a seguir para utilizar o conceito de supernó (vai ficar mais fácil entender acompanhando posteriormente o exemplo 13.9):

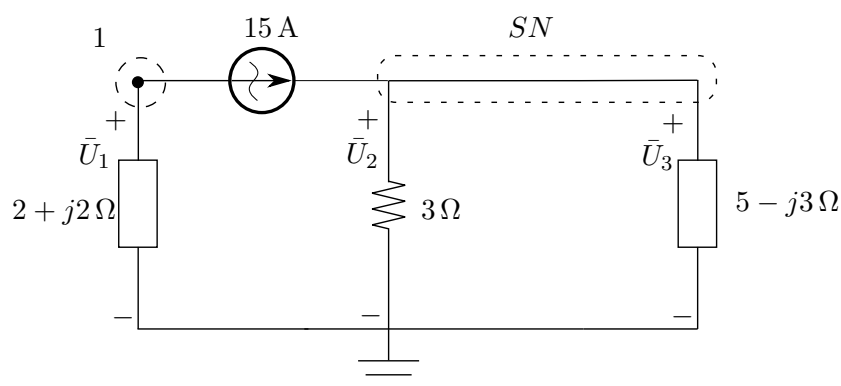
1. Identificar os nós do circuito e suas tensões em relação ao nó de referência;
2. Identificar a fonte de tensão e seus elementos em paralelo entre dois nós. Pode-se suprimir da ilustração do circuito os dois nós em análise e ilustrar um supernó;
3. Aplicar a lei de Kirchhoff das correntes no supernó e demais nós do circuito;
4. Aplicar a lei de Kirchhoff das tensões numa malha que envolva o supernó no circuito original;
5. Resolver as equações e encontrar as tensões do circuito.

Exemplo 13.9. Calcule a potência ativa do dispositivo modelado pela resistência de $5 - j3\Omega$ no circuito mostrado na figura 13.10(a). Resolva o problema considerando os nós e tensões já indicados no referido circuito.

Solução:



(a) Circuito original com identificação de nós.



(b) Circuito após a identificação do supernó.

Figura 13.10: Ilustração referente ao exemplo 13.9.

Saliente-se que sempre que for aplicada a lei de Kirchhoff das correntes nesta solução serão postas à esquerda da igualdade as correntes que entram no nó e à direita as correntes que saem do referido nó. Seguindo as cinco etapas descritas anteriormente:

1. No próprio circuito original (ver figura 13.10(a)) já foram estabelecidos os nós 1, 2, 3 e de referência.
2. Com a retirada da fonte de tensão e da resistência de $4\ \Omega$ que está em paralelo com ela fica estabelecido o supernó (SN) conforme ilustrado na figura 13.10(b).
3. O circuito simplificado tem os nós 1 e SN , então as equações de corrente são:

Para o nó 1:

$$0 = \frac{\bar{U}_1}{(2 + j2)} + 15$$

$$\bar{U}_1 = (30 + j30)\text{ V} \quad (13.22)$$

Para o SN :

$$15 = \frac{\bar{U}_2}{3} + \frac{\bar{U}_3}{(5 - j3)}$$

$$\frac{15[3(5 - j3)]}{3(5 - j3)} = \frac{(5 - j3)\bar{U}_2 + 3\bar{U}_3}{3(5 - j3)}$$

$$(5 - j3)\bar{U}_2 + 3\bar{U}_3 = 225 - j135 \quad (13.23)$$

4. São três os nós no circuito original (excluindo o de referência), então é necessário encontrar uma terceira equação para solucionar o sistema, pois este precisa ter três variáveis (tensões). A terceira equação virá da aplicação da lei de Kirchhoff das tensões em qualquer malha que envolva o supernó, porém isto deve ser feito no circuito original (ver figura 13.10(a)). No referido circuito é escolhida a malha com a fonte de $127 \angle -25^\circ$ V, a resistências de 3Ω e a impedância $5 - j3 \Omega$. A equação encontrada após aplicação da lei de Kirchhoff das tensões é:

$$-\bar{U}_2 + 127 \angle -25^\circ + \bar{U}_3 = 0$$

$$\bar{U}_2 - \bar{U}_3 = 127 \angle -25^\circ \quad (13.24)$$

5. Três equações ((13.22), (13.23) e (13.24)) e três incógnitas. Basta solucionar o sistema e encontrar as respostas (neste caso $\bar{U}_1$ já está calculado desde a análise nodal): $\bar{U}_1 = 42,43 \angle 45^\circ$ V, $\bar{U}_2 = 75,2 \angle -6,87^\circ$ V e $\bar{U}_3 = 60,25 \angle 132,15^\circ$ V. Não foram solicitados os cálculos destas tensões e sim a potência ativa relativa à impedância de $5 - j3 \Omega$ (releia o enunciado) e para isto bastava o cálculo de $\bar{U}_3$, que é a tensão nos terminais do referido elemento. A potência ativa solicitada pode ser encontrada da equação de potência complexa:

$$\mathbf{S}_{(5-j3)\Omega} = \frac{|\bar{U}|^2}{\mathbf{Z}^*} = \frac{|\bar{U}_3|^2}{(5 + j3)} = \frac{(60,25)^2}{(5 + j3)} = 533,83 - j320,30 \text{ VA}$$

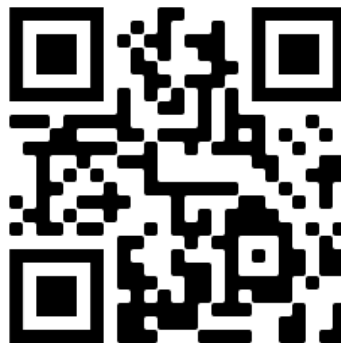
A potência ativa é a parte real da potência complexa:

$$P_{(5-j3)\Omega} = 533,83 \text{ W}$$

□

Videoaula 13.6 (Técnica do supernó em circuitos CA). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de nós em circuitos CA quando é necessário utilizar o conceito de supernó acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/YmZSaIbe5Dc>



13.5.2 Análise de nós por inspeção

As técnicas de solução de circuitos por inspeção criam enormes facilidades, pois olhando o desenho do circuito pode-se escrever as equações a partir de regras, sendo desnecessário entender leis físicas ou conceitos mais avançados. Conforme foi detalhada na seção 6.5.2, na qual a mesma técnica foi explicada para os circuitos CC, a análise nodal por inspeção só é aplicável em circuitos que possuam somente fontes de corrente não controladas: então se no seu circuito há fontes de tensão de qualquer tipo ou fontes de correntes controladas, o método não se aplica. Os mesmos procedimentos são aplicáveis em circuitos CA, porém as matrizes e os vetores que surgem são compostos por números complexos e esta é a única novidade.

O objetivo é descrever o circuito com a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{Y}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{I}} \quad (13.25)$$

As indicações em negrito servem para indicar que se trata de matrizes ou vetores. Na equação (13.25) tem-se:

- $\mathbf{Y}$ representando a matriz admitância. Se não lembra da definição de admitância volte à seção 10.6.3;
- $\bar{\mathbf{U}}$ representando o vetor de tensões de nós;
- $\bar{\mathbf{I}}$ representando o vetor de correntes de nós.

Tendo eles os seguintes formatos:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} & \cdots & \mathbf{Y}_{1N} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} & \cdots & \mathbf{Y}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N1} & \mathbf{Y}_{N2} & \cdots & \mathbf{Y}_{NN} \end{bmatrix} \quad (13.26)$$

Os elementos da diagonal principal são obtidos pela soma das admitâncias conectadas a cada um dos nós (por exemplo, $\mathbf{Y}_{33}$ é o somatório dos valores de todas as admitâncias do nó 3) e os elementos fora da diagonal são os opostos (sinal trocado) de cada uma das admitâncias que estão presente entre os nós (por exemplo, $\mathbf{Y}_{13}$ é o oposto da admitância comum aos nós 1 e 3). Saliente-se que neste caso N (subscrito utilizado nas equações (13.26), (13.27) e (13.28)) representa o número de nós já tirando o de referência; esta ênfase é necessária, pois em seções anteriores foi considerado que o circuito tinha N nós e a quantidade de nós sem ser o de referência era $N - 1$. **Repetindo:** N no presente caso é o número de nós, já excluindo o de referência;

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \vdots \\ \bar{U}_N \end{bmatrix} \quad (13.27)$$

é o vetor com as tensões de nós que se deseja encontrar;

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_N \end{bmatrix} \quad (13.28)$$

é o vetor cujos valores correspondem à soma das correntes dos nós em avaliação, sendo as correntes que entram recebendo sinal positivo e as que saem sinal negativo.

A solução para este problema é facilmente encontrado realizando a operação matricial a seguir:

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{Y}^{-1}\bar{\mathbf{I}} \quad (13.29)$$

Exemplo 13.10. Utilize o método de análise de nós por inspeção no circuito ilustrado na figura 13.11 para encontrar as tensões dos nós enumerados em relação ao de referência

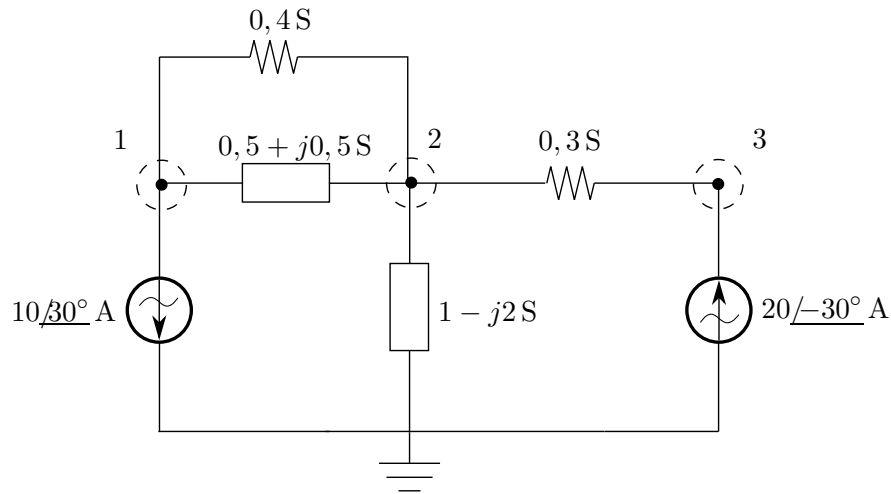


Figura 13.11: Ilustração referente ao exemplo 13.10.

Solução:

Estudante, note que os elementos passivos são representados por admitâncias e que se houvesse alguma impedância, seria necessário fazer a inversão do valor para encontrar a admitância correspondente. Fique atento à unidade siemens (S) para garantir que todos os valores apresentados estão conforme o método exige, ou seja, como admitâncias.

Primeiramente será encontrada a matriz admitância, que seguindo as orientações já descritas na presente seção é:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} [(0,5 + j0,5) + (0,4)] & -[(0,4) + (0,5 + j0,5)] & (0) \\ -[(0,4) + (0,5 + j0,5)] & [(0,4) + (0,5 + j0,5) + (1 - j2) + (0,3)] & -(0,3) \\ (0) & -(0,3) & (0,3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0,9 + j0,5 & -0,9 - j0,5 & 0 \\ -0,9 - j0,5 & 2,2 - j1,5 & -0,3 \\ 0 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \quad (13.30)$$

Encontra-se agora o vetor de correntes das fontes de corrente: lembrando, considerar valor positivo para as correntes que entram e valor negativo para as que saem. Encontra-se então:

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} -(10\angle 30^\circ) \\ (0) \\ +(20\angle -30^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 150^\circ \\ 0 \\ 20\angle -30^\circ \end{bmatrix} \quad (13.31)$$

Encontrar as tensões de cada um dos três nós em relação ao de referência ficou fácil, desde que se saiba a álgebra matricial ou operar corretamente algum *software* que faça os cálculos a seguir:

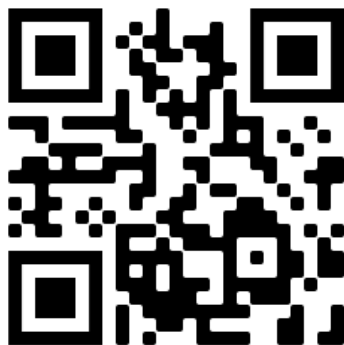
$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{Y}^{-1}\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0,9 + j0,5 & -0,9 - j0,5 & 0 \\ -0,9 - j0,5 & 2,2 - j1,5 & -0,3 \\ 0 & -0,3 & 0,3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 10\angle 150^\circ \\ 0 \\ 20\angle -30^\circ \end{bmatrix} \quad (13.32)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \bar{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,87\angle 96,7^\circ \text{ V} \\ 4,47\angle 33,4^\circ \text{ V} \\ 68,78\angle -26,7^\circ \text{ V} \end{bmatrix} \quad (13.33)$$

□

Videoaula 13.7 (Análise de nós por inspeção em circuitos CA). Para mais informações sobre o uso da técnica de análise de nós por inspeção em circuitos CA, com exemplo, acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/pPkJ9LhC2Eg>



13.6 Teorema da superposição

Mais uma vez é importante afirmar que o estudante dedicado já sabe utilizar o teorema da superposição, pois o estudou na seção 6.6. Todos os conceitos se aplicam agora em circuito CA, tendo como novidade o aparecimento dos números complexos nas operações matemáticas, porém o conceito é o mesmo: é possível identificar os efeitos de cada uma das fontes individualmente e para isto basta desligar as demais. Se deseja-se saber o efeito de todas elas ou de algumas delas, basta encontrar os efeitos individuais e depois somar.

É conveniente rerepresentar o procedimento para sistematizar a aplicação do teorema da superposição. As fontes que não se deseja saber o efeito no circuito no momento devem ser desligadas e isto significa que:

Fontes de tensão devem ser curto circuitadas;

Fontes de corrente devem ser abertas.

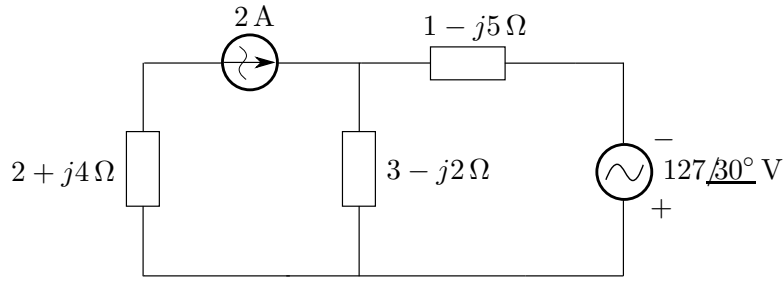
Com as demais fontes desligadas pode-se proceder utilizando qualquer método de análise de circuitos já apresentada para se calcular a tensão ou corrente no ponto desejado. O uso do teorema da superposição ficará mais claro se o estudante acompanhar de forma atenta o exemplo 13.11.

Exemplo 13.11. Utilize o teorema da superposição para encontrar a tensão $\bar{U}$ nos terminais da impedância de $3 - j2\Omega$ do circuito mostrado na figura 13.12(a). Deve-se calcular a tensão nos terminais da referida impedância criada devido à presença de cada uma das fontes do circuito e depois realizar a soma para encontrar o valor de $\bar{U}$.

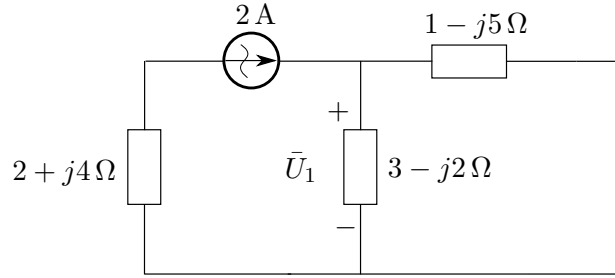
Nota: este circuito é o mesmo do exemplo 13.8 e, portanto, é possível comparar as respostas.

Solução:

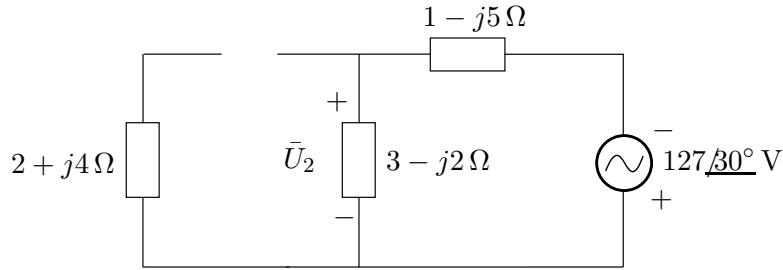
Primeiro será analisada a influência da fonte de corrente na tensão da impedância de $3 - j2\Omega$ e para isto as demais fontes do circuito devem ser desligadas. No caso só há uma fonte de tensão que deve ser curto circuitada, como pode ser visto na figura 13.12(b). Note nesta figura que a tensão $\bar{U}_1$ representa a influência da fonte de corrente na impedância de $3 - j2\Omega$.



(a) Circuito original.



(b) Circuito após o desligamento da fonte de tensão.



(c) Circuito após o desligamento da fonte de corrente.

Figura 13.12: Ilustração referente ao exemplo 13.11.

Qualquer método de análise de circuitos pode ser empregado, mas pode-se resolver mais facilmente se o conceito de divisor de corrente for utilizado¹. Procedendo com os cálculos:

$$\bar{I}_{3-j2\Omega} = 2 \times \left(\frac{(1-j5)}{(3-j2)(1-j5)} \right)$$

$$\bar{I}_{3\Omega} = 1,26 \angle -18,4^\circ \text{ A}$$

A tensão $\bar{U}_1$ pode ser encontrada multiplicando a impedância pela corrente que flui por ela:

$$\bar{U}_1 = (3-j2) \times 1,26 \angle -18,4^\circ$$

$$\bar{U}_1 = 2,8 - j3,6 \text{ V} = 4,56 \angle -52,1^\circ \text{ V} \quad (13.34)$$

O próximo passo é identificar a influência da fonte de tensão e isto exige que as demais fontes estejam desligadas; no caso há apenas a fonte de corrente a ser aberta, conforme mostrado no circuito da figura 13.12(c). Qualquer método de análise de circuitos pode ser utilizado, mas a tensão $\bar{U}_2$ pode ser facilmente encontrada utilizando somente um divisor de tensão². Procedendo com os cálculos:

$$\bar{U}_2 = - \left[127 \angle 30^\circ \times \left(\frac{(3-j2)}{(3-j2) + (1-j5)} \right) \right]$$

$$\bar{U}_2 = -31,3 - j47,4 \text{ V} = 56,8 \angle 123,4^\circ \text{ V} \quad (13.35)$$

¹Se não lembra do divisor de corrente estude novamente o conteúdo da seção 10.6.2

²Se não lembra do divisor de tensão estude novamente o conteúdo da seção 10.6.1

A tensão nos terminais da impedância de $3 - j2\Omega$ sofre influência de ambas as fontes do circuito e, portanto, o seu valor só pode ser calculado usando os resultados mostrados nas equações (13.34) e (13.35). Seguem os cálculos finais:

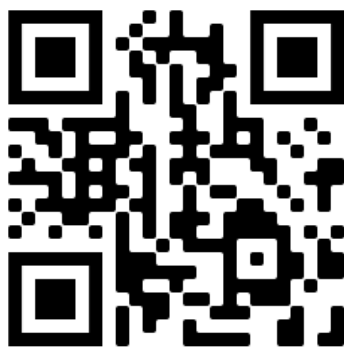
$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{U}_1 + \bar{U}_2 \\ \bar{U} &= (2,8 - j3,6) + (-31,3 - j47,4) \\ \bar{U} &= -28,5 - j51\text{ V} = 58,4 \angle -119,2^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Compare o resultado com o encontrado no exemplo 13.8 (note que nele a tensão na impedância $3 - j2\Omega$ é chamada de $\bar{U}_2$) e verá que a resposta é a mesma.

□

Videoaula 13.8 (Teorema da superposição em circuitos CA). Para mais informações sobre o teorema da superposição acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/gpwEC8Prwx8>



13.7 Teorema de Thévenin

É conveniente que o estudante tenha compreendido a seção 6.7, já que esta descreve como encontrar um circuito equivalente de Thévenin para o caso CC. Se entendeu a seção indicada, então pode dar início ao estudo do teorema de Thévenin em circuitos CA.

O teorema de Thévenin diz que um circuito com fontes de tensão e de corrente senoidais pode ser substituído por outro equivalente que possui apenas uma fonte de tensão senoidal em série com uma impedância. Estas são chamadas, respectivamente, de fonte de tensão de Thévenin e impedância de Thévenin. Os circuitos elétricos da figura 13.13 auxiliam no entendimento das explicações dadas na sequência. O circuito original é o da figura 13.13(a) e nele estão identificados os terminais a e b nos quais pode-se conectar uma carga. Utilizando-se o teorema de Thévenin pode-se simplificar o circuito e ele ficará como o mostrado na figura 13.13(b). O procedimento para se realizar a simplificação é descrito e ilustrado na sequência:

1. Deve-se identificar os terminais a partir dos quais deseja-se realizar a simplificação. Neste livro os terminais serão identificados pelas letras a e b ;
2. Deve-se separar a parte do circuito que se deseja obter o circuito equivalente de Thévenin a partir dos terminais a e b , identificados no item anterior. Deste circuito calcula-se o valor da tensão $\bar{U}_{ab}$, cujo valor é o da fonte de tensão de Thévenin, ou seja, $\bar{U}_{Th} = \bar{U}_{ab}$;

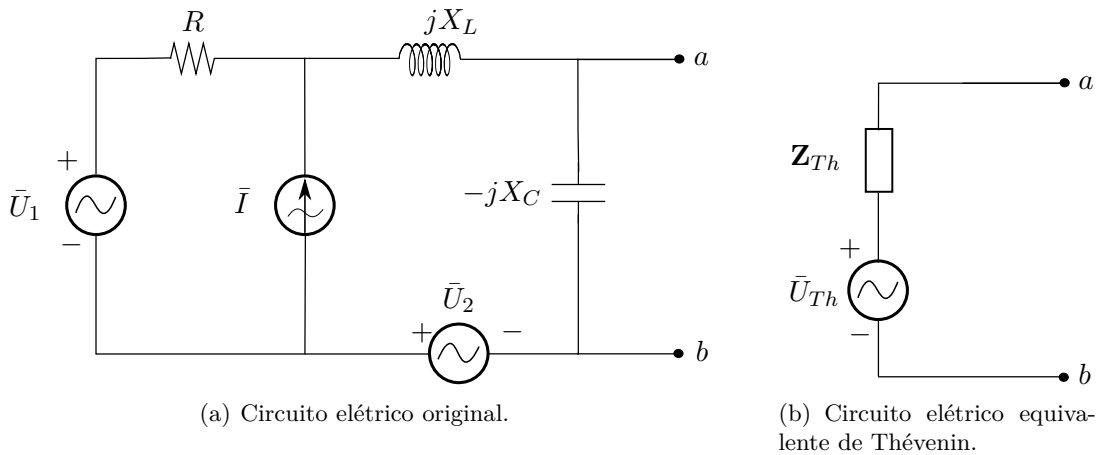


Figura 13.13: Circuitos elétricos para análise do teorema de Thévenin.

3. Calcula-se a impedância equivalente de Thévenin Z_{Th} . Esta é a impedância equivalente vista a partir dos terminais a e b do circuito obtido no item anterior quando todas as fontes de tensão forem curto-circuitadas e todas as fontes de corrente forem abertas;
4. Desenha-se o circuito com a fonte de tensão de Thévenin e a resistência de Thévenin e pode-se utilizá-lo como um circuito equivalente ao original.

Os exemplos 13.12 e 13.13 ilustram o uso do procedimento descrito.

Exemplo 13.12. Um dispositivo, alimentado por um circuito conforme mostrado na figura 13.14(a) (página 262), pode ser representado por uma impedância de carga Z_c . Este dispositivo permite que através de uma chave modifique-se suas características de maneira que Z_c possa assumir dois valores, que são: $Z_c = 2 + j2\Omega$ e $Z_c = 4 + j3\Omega$. Calcule a corrente drenada pelo dispositivo considerando que a carga pode ter estes dois valores de impedância fornecidos. Use o teorema de Thévenin.

Solução:

Para solucionar este exemplo será utilizado o procedimento descrito, conforme feito a seguir:

1. Na figura 13.14(b) são identificados os terminais a e b a partir dos quais deseja-se obter o equivalente de Thévenin.
2. A figura 13.14(c) mostra o circuito a partir do qual se deseja calcular o equivalente de Thévenin. O valor da tensão entre os terminais a e b são calculados empregando a lei de Kirchhoff das malhas, que se aplicada no sentido horário, como mostrado na figura 13.14(d), resultando na equação:

$$(4/\underline{10^\circ})\bar{I} - 10/\underline{10^\circ} + (3/\underline{20^\circ})\bar{I} + 6 = 0$$

O valor de $\bar{I}$ é:

$$\bar{I} = \frac{10/\underline{10^\circ} - 6}{4/\underline{10^\circ} + 3/\underline{20^\circ}}$$

$$\bar{I} = 0,605/\underline{10^\circ} \text{ A}$$

Note que os cálculos para encontrar o valor de $\bar{I}$ não foram mostrados passo a passo, pois a esta altura o estudante já sabe fazê-los e isto poderia tirar o foco do entendimento da solução que trata do uso do teorema de Thévenin. Por sinal, nesta etapa o interesse é obter a tensão $\bar{U}_{ab}$, cuja análise do circuito mostrado na figura 13.14(d) permite escrever que:

$$U_{ab} = (3/\underline{20^\circ})\bar{I} + 6$$

Substituindo o valor de $\bar{I}$ (que vale $0,605\angle 10^\circ$ A) encontrado anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ab} &= (3\angle 20^\circ)\bar{I} + 6 \\ \bar{U}_{ab} &= (3\angle 20^\circ) \times (0,605\angle 10^\circ) + 6 \\ \bar{U}_{ab} &= 7,57 + j0,91 \text{ V} = 7,63\angle 6,84^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\bar{U}_{Th} = \bar{U}_{ab} = 7,57 + j0,91 \text{ V} = 7,63\angle 6,84^\circ \text{ V}$$

3. O passo seguinte é calcular o valor de $\mathbf{Z}_{Th}$, que é a impedância equivalente entre os terminais a e b se todas as fontes de tensão forem curto-circuitadas e as fontes de corrente forem abertas (no presente exemplo não há fontes de corrente). A figura 13.14(e) mostra como fica o circuito elétrico com as fontes curto-circuitadas e daí conclui-se que deve-se associar as impedâncias de $4\angle 10^\circ \Omega$ e de $3\angle 20^\circ \Omega$ em paralelo, como é feito a seguir:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{Th} &= (4\angle 10^\circ) // (3\angle 20^\circ) \\ \mathbf{Z}_{Th} &= \frac{4\angle 10^\circ \times 3\angle 20^\circ}{4\angle 10^\circ + 3\angle 20^\circ} \\ \mathbf{Z}_{Th} &= 1,72\angle 15,72^\circ \Omega = 1,66 + j0,47 \Omega\end{aligned}$$

4. O circuito original (figura 13.14(a)) agora pode ser substituído pelo circuito equivalente de Thévenin mostrado na figura 13.14(f). No enunciado deste exemplo foi solicitado o valor da corrente drenada pela carga com dois valores distintos de impedância da carga, portanto, a aplicação da lei de Kirchhoff das malhas como mostrado na figura 13.14(g), permite encontrar a seguinte expressão:

$$\mathbf{Z}_c \bar{I}_c - 7,63\angle 6,84^\circ + (1,72\angle 15,72^\circ) \bar{I}_c = 0$$

Isolando o valor de $\bar{I}_c$, encontra-se:

$$\bar{I}_c = \frac{7,63\angle 6,84^\circ}{\mathbf{Z}_c + 1,72\angle 15,72^\circ} \quad (13.36)$$

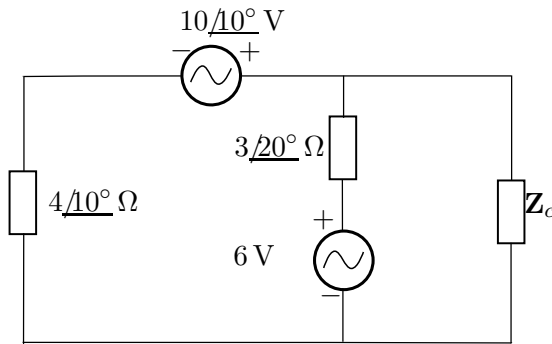
Para encontrar o que foi solicitado no exemplo basta substituir os valores dados de impedância de carga ($\mathbf{Z}_c = 2 + j2 \Omega$ e $\mathbf{Z}_c = 4 + j3 \Omega$), como é feito a seguir:

- Para $\mathbf{Z}_c = 2 + j2 \Omega$ o valor da corrente drenada pela carga é encontrado com o uso da equação (13.36). Assim tem-se:

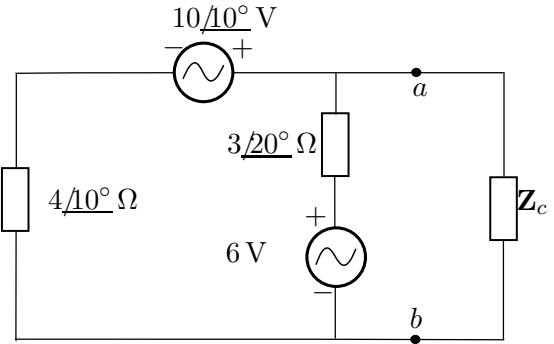
$$\begin{aligned}\bar{I}_c &= \frac{7,63\angle 6,84^\circ}{\mathbf{Z}_c + 1,72\angle 15,72^\circ} \\ \bar{I}_c &= \frac{7,63\angle 6,84^\circ}{(2 + j2) + 1,72\angle 15,72^\circ} \\ \bar{I}_c &= 1,73\angle -27,16^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

- Para $\mathbf{Z}_c = 4 + j3 \Omega$ o valor da corrente drenada pela carga é encontrado com o uso da equação (13.36). Assim tem-se:

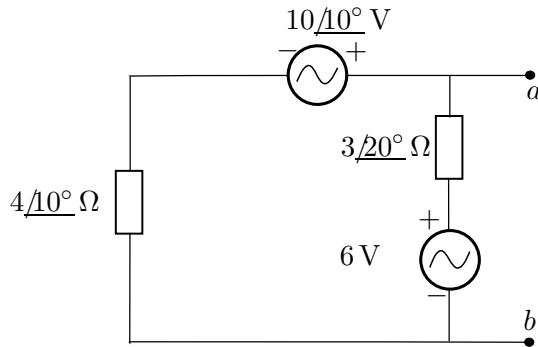
$$\begin{aligned}\bar{I}_c &= \frac{7,63\angle 6,84^\circ}{\mathbf{Z}_c + 1,72\angle 15,72^\circ} \\ \bar{I}_c &= \frac{7,63\angle 6,84^\circ}{(4 + j2) + 1,72\angle 15,72^\circ} \\ \bar{I}_c &= 1,15\angle -24,66^\circ \text{ A}\end{aligned}$$



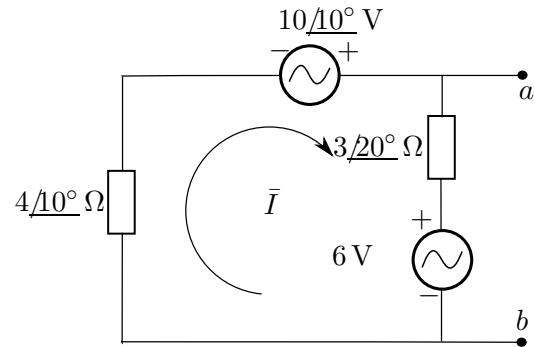
(a) Circuito elétrico original relativo ao exemplo 13.12.



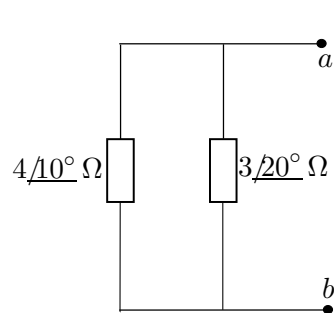
(b) Circuito elétrico com as indicações dos terminais a partir dos quais será feita a simplificação.



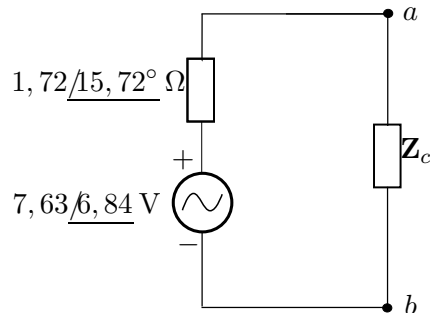
(c) Circuito elétrico que será simplificado.



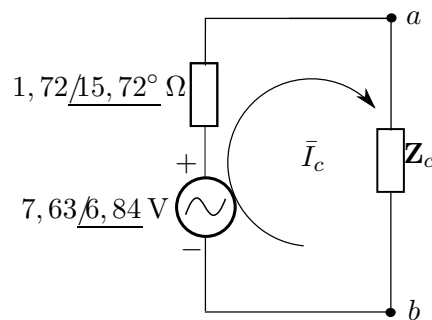
(d) Empregando a lei de Kirchhoff das malhas.



(e) Circuito equivalente de Thévenin.



(f) Circuito equivalente de Thévenin.



(g) Circuito equivalente de Thévenin.

Figura 13.14: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 13.12.

□

Exemplo 13.13. Determine o circuito equivalente de Thévenin visto dos terminais a e b para o circuito apresentado na figura 13.15(a).

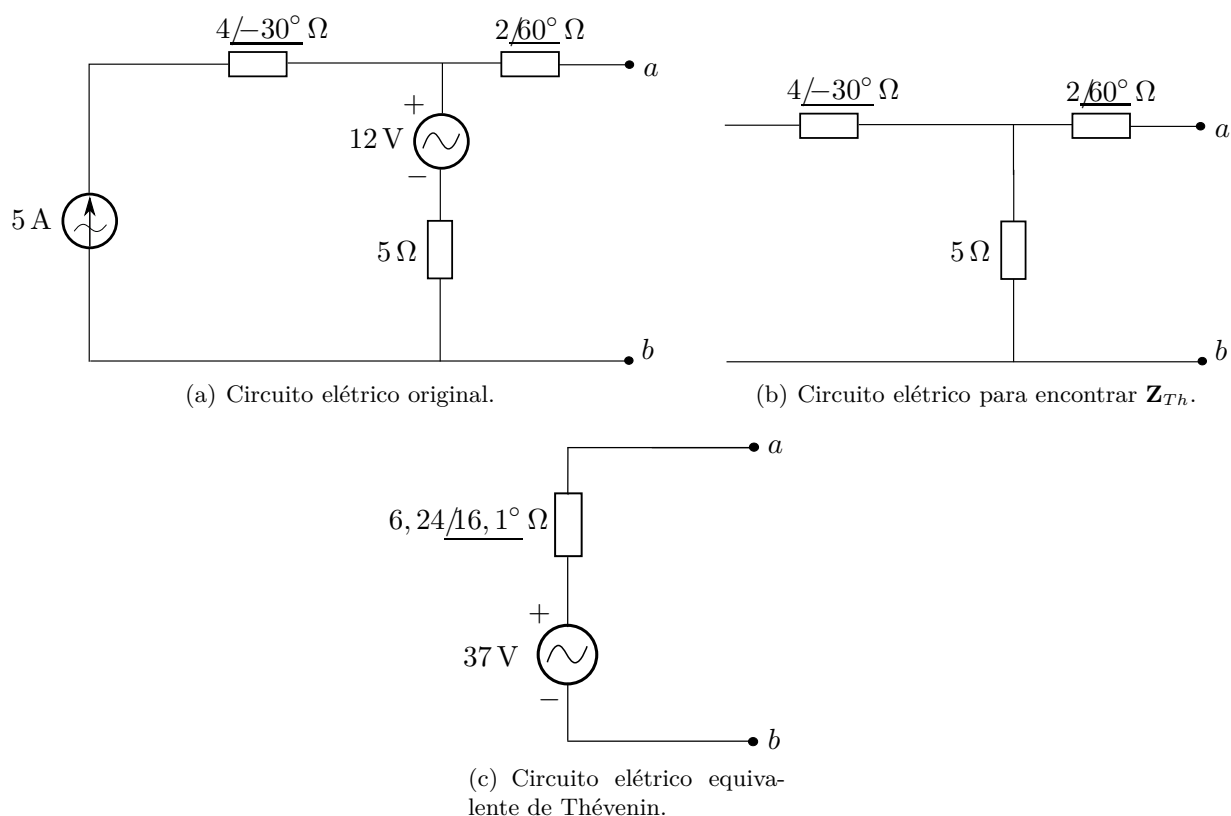


Figura 13.15: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 13.13.

Solução:

Este problema é mais simples, então será feito de forma mais resumida. Fazendo a análise da única malha do circuito da figura 13.15(a) no sentido horário encontra-se que o valor da corrente circulante nesta malha é:

$$\bar{I} = 5 \text{ A}$$

A tensão de Thévenin é:

$$\bar{U}_{Th} = \bar{U}_{ab} = 12 + 5 \times \bar{I}$$

$$\bar{U}_{Th} = 12 + 5 \times 5$$

$$\bar{U}_{Th} = 37 \text{ V}$$

A impedância de Thévenin vista dos terminais a e b é encontrada com auxílio do circuito da figura 13.15(b), no qual a fonte de corrente está aberta. Assim sendo tem-se que:

$$\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_{ab} = 2\angle 60^\circ + 5$$

$$\mathbf{Z}_{Th} = 6,24\angle 16,1^\circ \Omega$$

O equivalente de Thévenin do circuito mostrado na figura 13.15(a) está desenhado na figura 13.15(c).

□

13.8 Teorema de Norton

Mais uma vez é recomendado que a aplicação em circuitos CC seja estudada anteriormente (seção 6.8). Para circuitos elétricos cujas fontes de tensão ou corrente sejam senoidais, pode-se enunciar

o teorema de Norton dizendo que um circuito pode ser substituído por outro equivalente que possui apenas uma fonte de corrente em paralelo com uma impedância, chamadas de fonte de corrente de Norton (cujo valor é representado por $\bar{I}_N$) e de impedância equivalente de Norton $\mathbf{Z}_N$, respectivamente. A figura 6.26 ilustra o teorema, de maneira que o circuito da figura 13.16(a) é substituído pelo circuito equivalente de Norton na figura 13.16(b).

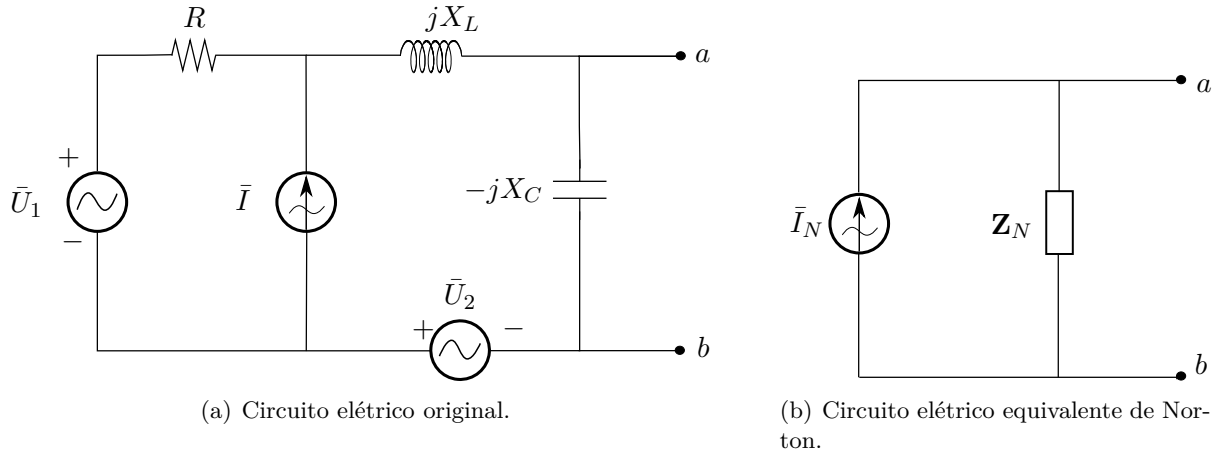


Figura 13.16: Circuitos elétricos para análise do teorema de Norton.

O procedimento para obtenção do circuito equivalente de Norton é descrito a seguir:

1. Identificar os terminais a partir dos quais deseja-se realizar a simplificação. Neste livro os terminais serão chamados de a e b ;
2. Separar a parte do circuito que se deseja obter o circuito equivalente de Norton a partir dos terminais a e b , identificados no item anterior, e curto-circuitá-los. Encontrar $\bar{I}_N$ (corrente de Norton) que é o valor da corrente entre os terminais a e b , se estes terminais estão curto-circuitados;
3. Calcular a impedância equivalente de Norton $\mathbf{Z}_N$. Esta é a impedância equivalente vista a partir dos terminais a e b se todas as fontes de tensão forem curto-circuitadas e todas as fontes de corrente elétrica forem abertas. Note que $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_N$;
4. Desenha-se o circuito com a fonte de corrente em paralelo com a impedância de Norton e pode-se utilizá-lo como um circuito equivalente ao circuito original.

Os exemplos 13.14 e 13.15 mostram aplicações do teorema de Norton.

Exemplo 13.14. Resolva novamente o exemplo 13.12, agora empregando o teorema de Norton.

Solução

O estudante deve ter lido e compreendido tanto o enunciado quanto a solução do exemplo 13.12 para que possa comparar os teoremas de Thévenin e de Norton. A solução empregando o teorema de Norton seguirá o procedimento descrito anteriormente nesta seção, como é mostrado a seguir:

1. A identificação dos terminais é feita na figura 13.17(b) (página 266);
2. O passo seguinte é isolar o circuito que se deseja simplificar, curto-circuitar seus terminais (ver figura 13.17(c)) e calcular a corrente que circula pelo fio do curto-circuito do terminal a para o terminal b . Empregando a lei de Kirchhoff das tensões com as correntes indicadas no sentido horário como mostrado no circuito da figura 13.17(d) vê-se que $\bar{I}_N = \bar{I}_2$. A equação de tensão da malha 1 é:

$$(4\angle 10^\circ)\bar{I}_1 - 10\angle 10^\circ + (3\angle 20^\circ)(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) + 6 = 0$$

A equação de tensão da malha 2 é:

$$-6 + (3\angle 20^\circ)(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) = 0$$

Fazendo os cálculos necessários para organizar as equações de tensão das malhas 1 e 2 como um sistema, encontra-se:

$$\begin{cases} (6,76 + j1,72)\bar{I}_1 - (2,82 + j1,03)\bar{I}_2 = 3,85 + j1,74 \\ -(2,82 + j1,03)\bar{I}_1 + (2,82 + j1,03)\bar{I}_2 = 6 \end{cases} \quad (13.37)$$

Na solução do sistema da equação (13.37) não é necessário encontrar o valor de $\bar{I}_1$, pois já foi mostrado que $\bar{I}_N$ (valor que se está procurando) é igual a $\bar{I}_2$. O estudante pode resolver o sistema de equações lineares como exercício e deve encontrar o seguinte resultado:

$$\bar{I}_N = \bar{I}_2 = 4,38 - j0,68 \text{ A} = 4,43\angle -8,82^\circ \text{ A}$$

3. A impedância equivalente de Norton é encontrada da mesma maneira que a impedância equivalente de Thévenin, ou seja, deve-se encontrar a impedância equivalente do circuito mostrado na figura 13.17(e), que resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{Th} &= (4\angle 10^\circ)/(3\angle 20^\circ) \\ \mathbf{Z}_{Th} &= 1,72\angle 15,72^\circ \Omega = 1,66 + j0,47 \Omega \end{aligned}$$

4. Calculados os valores necessários para representar o circuito equivalente de Norton (figura 13.17(f)) o passo seguinte é utilizá-lo com a carga acoplada, como é mostrado na figura 13.17(g). O valor da corrente $\bar{I}_c$ que circula através da impedância da carga $\mathbf{Z}_c$ pode ser encontrado empregando o conceito de divisor de corrente. A seguir os cálculos de $\bar{I}_c$ para os dois valores de impedância de carga dados no enunciado.

- Para $\mathbf{Z}_c = 2 + j2 \Omega$ o valor da corrente drenada pela carga é encontrado empregando um divisor de corrente, assim tem-se:

$$\bar{I}_c = \left(\frac{1,72\angle 15,72^\circ}{1,72\angle 15,72^\circ + (2 + j2)} \right) \times 4,43\angle -8,82^\circ$$

Fazendo os cálculos, encontra-se:

$$\bar{I}_c = 1,73\angle -27,16^\circ \text{ A}$$

- Para $\mathbf{Z}_c = 4 + j3 \Omega$ o valor da corrente drenada pela carga também é encontrada empregando um divisor de corrente, assim tem-se:

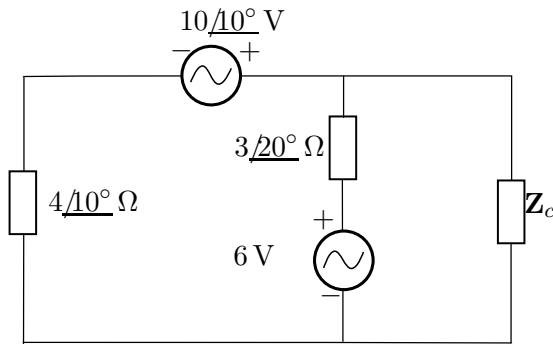
$$\bar{I}_c = \left(\frac{1,72\angle 15,72^\circ}{1,72\angle 15,72^\circ + (4 + j3)} \right) \times 4,43\angle -8,82^\circ$$

Fazendo os cálculos, encontra-se:

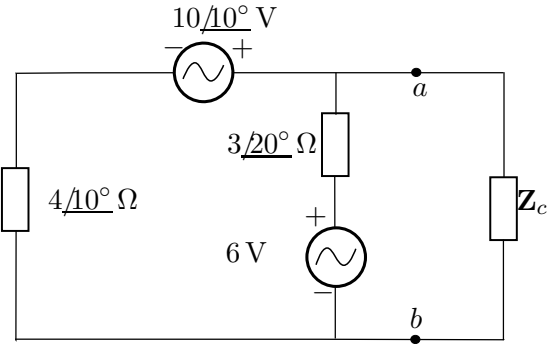
$$\bar{I}_c = 1,15\angle -24,66^\circ \text{ A}$$

Como esperado, os resultados das correntes elétrica drenadas pela carga encontrados com o uso do teorema de Norton foram iguais aos encontrados com o uso do teorema de Thévenin (exemplo 13.12).

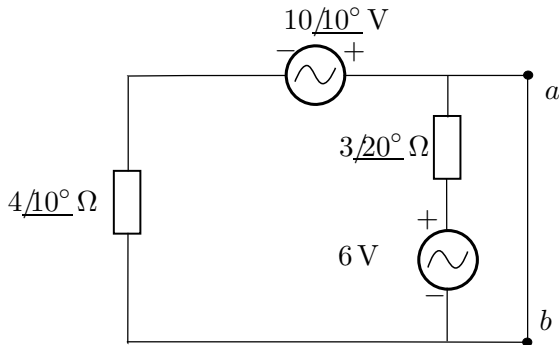
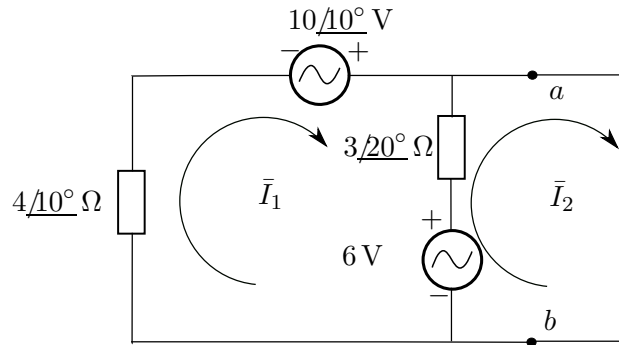
□



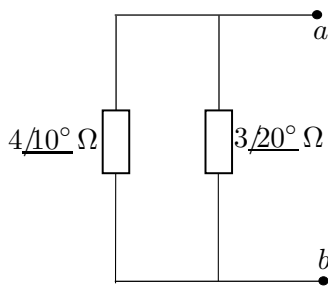
(a) Circuito elétrico original relativo ao exemplo 13.14.



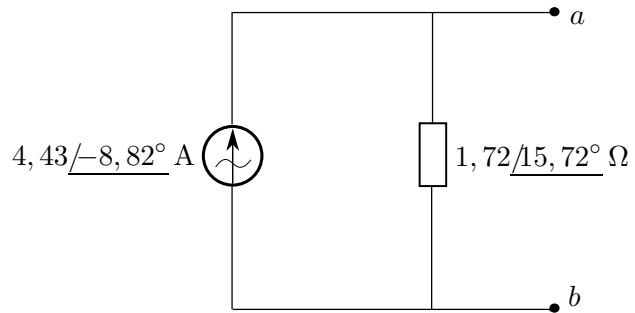
(b) Circuito elétrico com as indicações dos terminais a e b a partir dos quais será feita a simplificação.

(c) Circuito elétrico com os terminais a e b curto-circuitados.

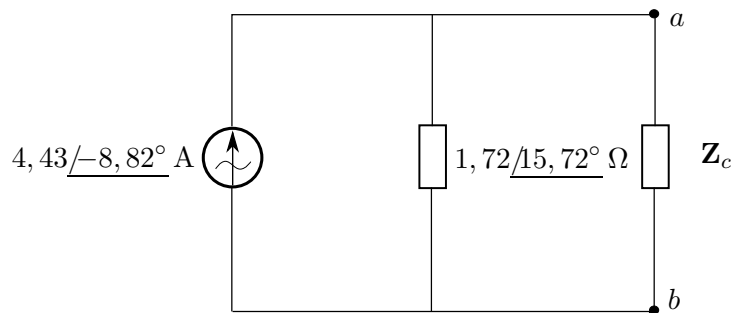
(d) Empregando a lei de Kirchhoff das malhas.



(e) Circuito equivalente de Thévenin.



(f) Circuito equivalente de Thévenin.



(g) Circuito equivalente de Thévenin.

Figura 13.17: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 13.14.

Exemplo 13.15. No exemplo 13.13 foi solicitado que fosse encontrado o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais a e b do circuito mostrado na figura 13.15(a). Agora é solicitado que seja encontrado o circuito equivalente de Norton visto dos terminais a e b deste mesmo circuito.

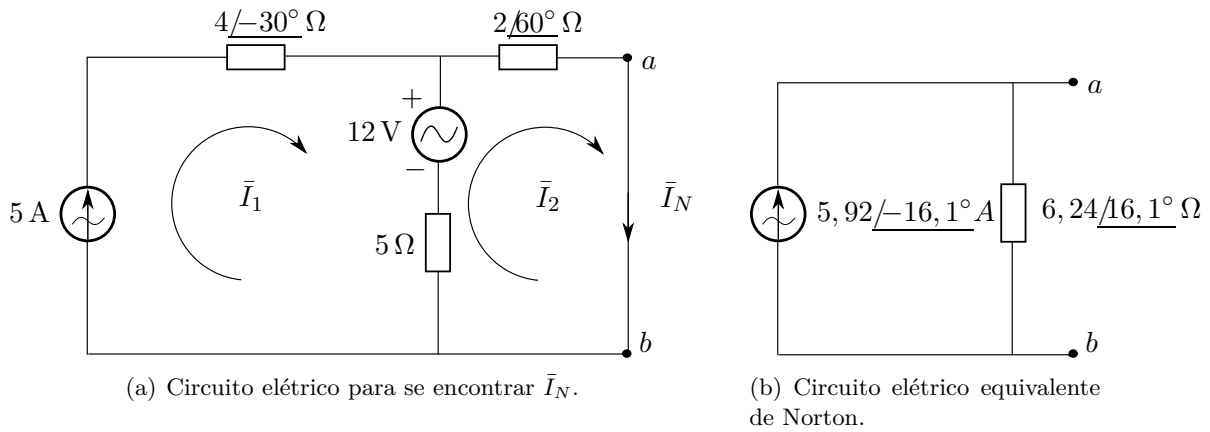


Figura 13.18: Circuitos elétricos relativos ao exemplo 13.15.

Solução:

O circuito mostrado na figura 13.18(a) está com os terminais a partir dos quais se deseja obter o circuito equivalente de Norton curto-circuitados. O valor da corrente da fonte de corrente de Norton está identificada como $\bar{I}_N$. Ainda no circuito da figura 13.18(a) estão identificadas as correntes de malha $\bar{I}_1$ e $\bar{I}_2$. Uma breve análise evidencia que $\bar{I}_N = \bar{I}_2$. O primeiro passo será encontrar o valor de $\bar{I}_N$ empregando a análise de malhas.

Da análise da malha 1 percebe-se que a corrente $\bar{I}_1$ é igual a corrente da fonte de corrente, assim:

$$\bar{I}_1 = 5 \text{ A}$$

Da análise da malha 2 pode-se escrever:

$$(2\angle 60^\circ)\bar{I}_2 + 5(\bar{I}_2 - \bar{I}_1) - 12 = 0$$

Substituindo o valor $\bar{I}_1 = 5 \text{ A}$ na equação anterior, encontra-se:

$$(2\angle 60^\circ)\bar{I}_2 + 5(\bar{I}_2 - 5) - 12 = 0$$

Dando continuidade ao cálculos:

$$(2\angle 60^\circ)\bar{I}_2 + 5\bar{I}_2 - 25 - 12 = 0$$

$$(6,24\angle 16,1^\circ) \times \bar{I}_2 = 37$$

$$\bar{I}_2 = 5,92\angle -16,1^\circ \text{ A}$$

Para se determinar $\mathbf{Z}_N$ deve-se curto-circuitar a fonte de tensão e abrir a fonte de corrente da mesma maneira que é feito para se encontrar $\mathbf{Z}_{Th}$. Portanto, $\mathbf{Z}_N$ é o valor da impedância equivalente vista dos terminais a e b do circuito mostrado na figura 13.15(b) e o seu valor é:

$$\mathbf{Z}_N = 6,24\angle 16,1^\circ \Omega$$

O circuito de Norton é mostrado na figura 13.18(b).

□

13.9 Relações entre os teoremas de Thévenin e de Norton

Os teoremas de Thévenin e de Norton são empregados para o mesmo propósito, que é transformar um circuito com muitos elementos em um mais simples que possui uma única impedância que está

em série com uma fonte de tensão, no caso de ser empregado o teorema de Thévenin, ou que está em paralelo com uma fonte de corrente, no caso de ser empregado o teorema de Norton. Conforme já mostrado nas seções anteriores as impedâncias equivalentes de Thévenin e de Norton são iguais, porém há também uma relação entre os valores da tensão de Thévenin $\bar{U}_{Th}$ e da corrente de Norton $\bar{I}_N$. As relações podem ser resumidas como:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_N \\ \bar{U}_{Th} = \mathbf{Z}_N \bar{I}_N \end{cases} \quad (13.38)$$

Como é evidente na equação (13.38) as impedâncias de Thévenin e Norton são sempre iguais. No exemplo 13.12 foi encontrado que $\bar{U}_{Th} = 7,63\angle 6,84^\circ \text{ V}$ e no exemplo 13.14 foram encontrados $\bar{I}_N = 4,43\angle -8,82^\circ \text{ A}$ e $\mathbf{Z}_N = 1,72\angle 15,72^\circ \Omega$. Portanto, substituindo os valores na equação $\bar{U}_{Th} = \mathbf{Z}_N \bar{I}_N$, encontra-se:

$$\bar{U}_{Th} = (1,72\angle 15,72^\circ)(4,43\angle -8,82^\circ)$$

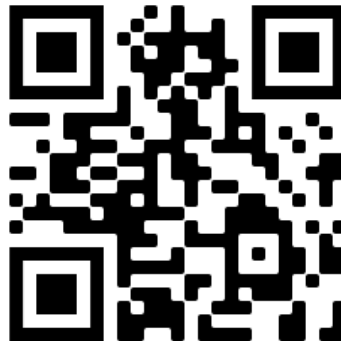
Isto resulta em:

$$\bar{U}_{Th} = 7,63\angle 6,84^\circ \text{ V}$$

Conclui-se que, como esperado, pode-se calcular os valores das grandezas tensão e impedância de Thévenin a partir dos valores de corrente e impedância de Norton e vice-versa.

Videoaula 13.9 (Teoremas de Thévenin e de Norton em circuitos CA). Para mais detalhes de como proceder para encontrar circuitos CA equivalentes de Thévenin e Norton, com exemplo, acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/GBoJXICRnC8>



13.10 Resumo do capítulo

A seguir um breve resumo dos principais métodos tratados no presente capítulo. Qualquer semelhança com o resumo do capítulo 6 não é mera coincidência, pois ambos tratam dos mesmos conteúdos, porém aqui no presente capítulo na versão para circuitos CA. Segue resumo:

- As leis de Kirchhoff são duas: uma diz que o somatório das correntes que entram em um nó é igual ao somatório das correntes que saem deste mesmo nó e a outra diz que o somatório das tensões de um laço é sempre igual a zero;
- A análise de malhas é um método que utiliza a lei de Kirchhoff das tensões para encontrar as equações e depois solucionar o sistema. O resultado obtido é o valor das correntes circulantes em cada uma das malhas;

- A análise de nós é um método que utiliza a lei de Kirchhoff das correntes para encontrar as equações e depois solucionar o sistema. O resultado obtido é o valor das tensões em cada um dos nós em relação ao nó de referência;
- As técnicas de análises de malha e de nós por inspeção permitem que ao olhar e interpretar o circuito sejam escritas equações matriciais que permitem encontrar todos os valores de correntes de malha ou tensões de nós;
- A supermalha e o supernó são casos particulares das análises por malha e por nós, respectivamente. A supermalha é utilizada quando há uma fonte de corrente entre duas malhas e o supernó quando há uma fonte de tensão entre dois nós;
- Os circuitos equivalentes obtidos utilizando os teoremas de Thévenin e de Norton se relacionam como descrito pelas equações $\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_N$ e $\bar{U}_{Th} = \mathbf{Z}_N \bar{I}_N$. Dessa maneira, o circuito equivalente de Thévenin pode ser encontrado a partir do circuito equivalente de Norton e vice-versa.

Problemas propostos

Problema 13.1. Determine o valor da corrente $\bar{I}_x$ nos circuitos elétricos mostrados na figura 13.19.

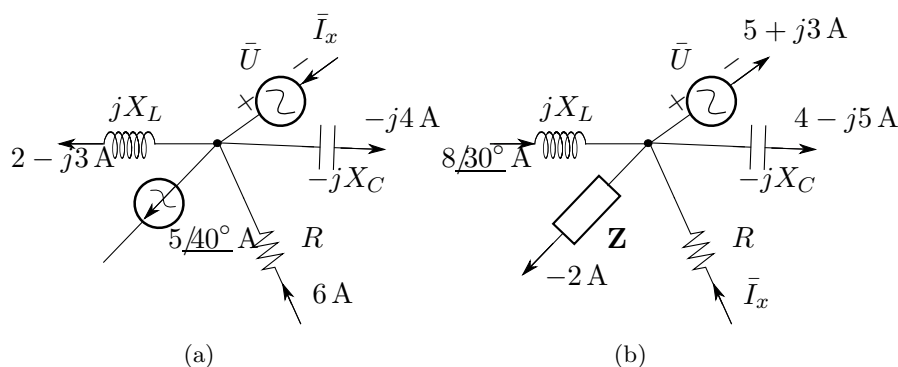


Figura 13.19: Circuitos elétricos relativos ao problema 13.1.

Problema 13.2. Determine o valor da corrente $\bar{I}_x$ nos circuitos elétricos mostrados na figura 13.20.

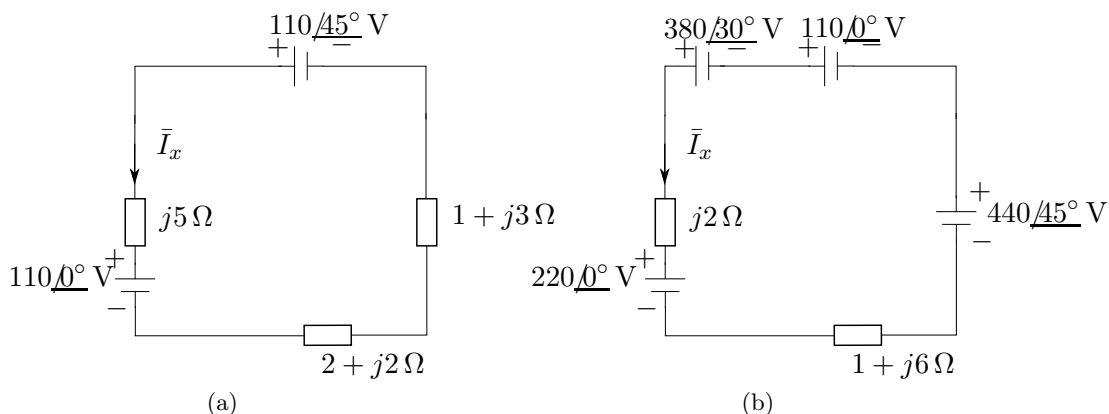


Figura 13.20: Circuitos elétricos relativos ao problema 13.2.

Problema 13.3. Para os circuitos elétricos mostrados na figura 13.21, determine a potência complexa fornecida por cada uma das fontes de tensão ilustradas. Resolva as questões utilizando análise de malhas, análise de nós, teorema da superposição e também, no caso de ter estudado o assunto, via análise de malhas por inspeção.

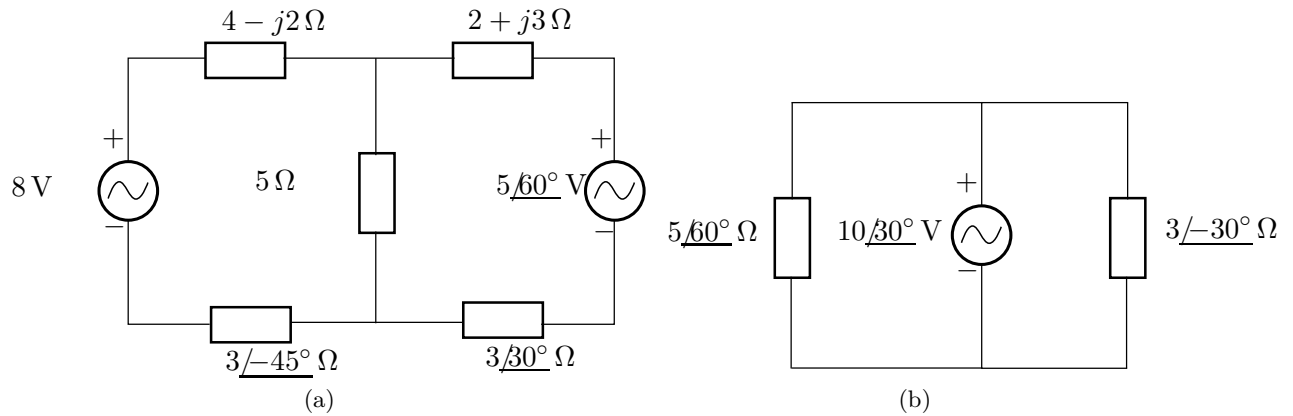


Figura 13.21: Circuitos elétricos relativos ao problema 13.3.

Problema 13.4. Determine o valor das correntes $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ e $\bar{I}_w$ no circuito mostrado na figura 13.22. Resolva as questões utilizando análise de malhas, análise de nós, teorema da superposição e também, no caso de ser possível, via análise de malhas por inspeção.

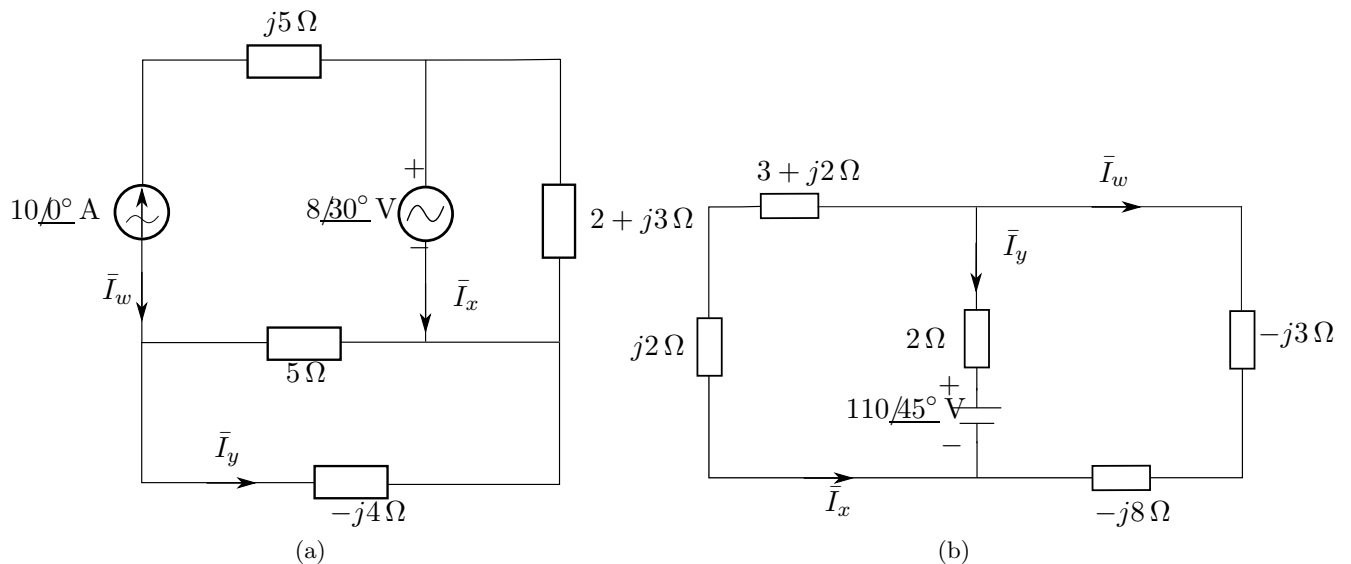


Figura 13.22: Circuito elétrico correspondente ao problema 13.4.

Problema 13.5. Para os circuitos elétricos mostrados na figura 13.23, determine os circuitos elétricos equivalentes de Thévenin e de Norton vistos dos terminais a e b .

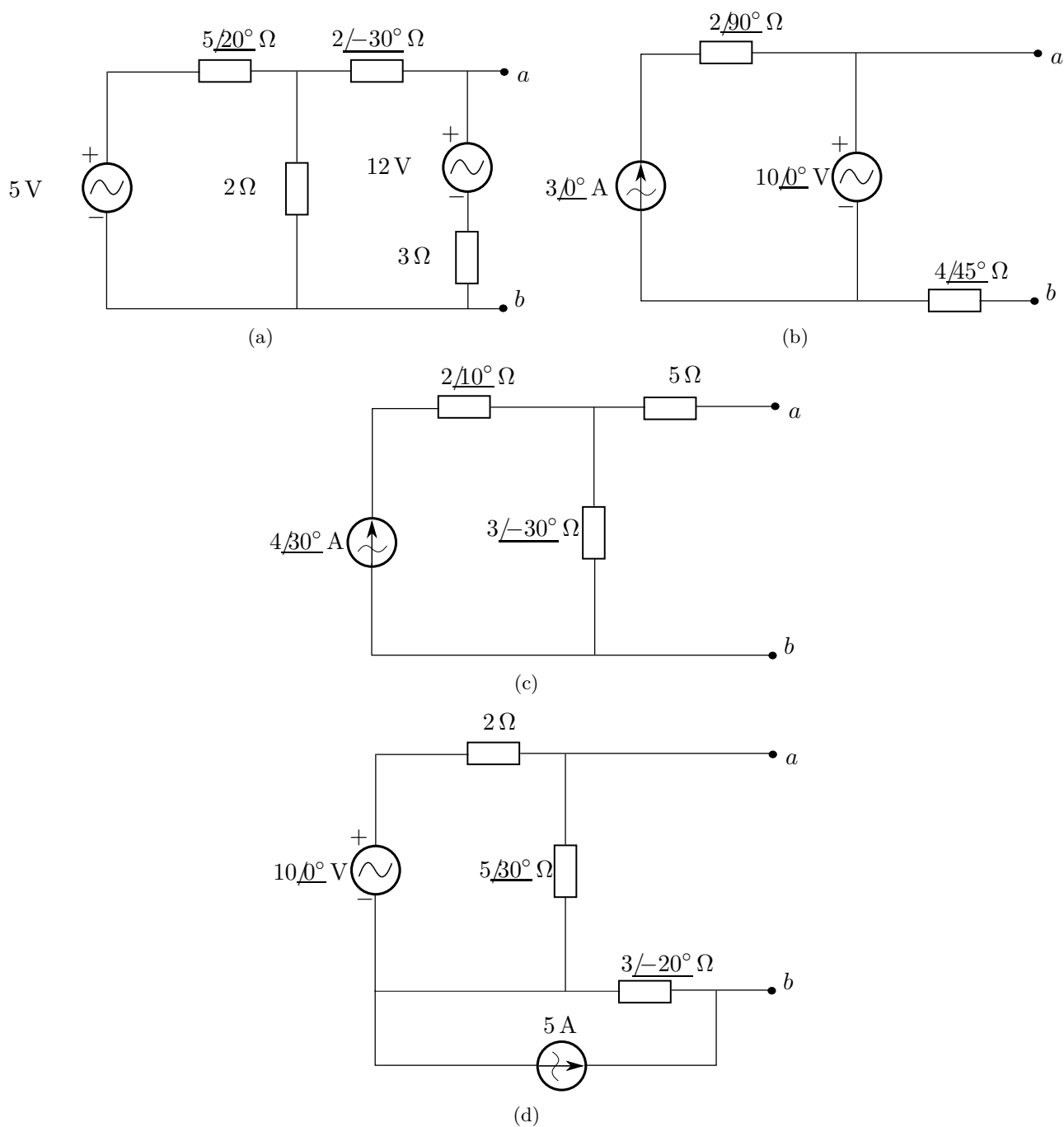


Figura 13.23: Circuitos elétricos relativos ao problema 13.5.

Problema 13.6. No circuito mostrado na figura 13.24 há uma carga representada pela impedância Z_c . Tendo esta informação em mente e empregando o teorema de Thévenin ou de Norton, encontre:

- O valor eficaz da corrente drenada pela carga em duas situações: primeiramente quando ela é representada por uma impedância de valor $3 + j1\Omega$ e depois quando ela é representada por uma impedância de valor $6 + j1\Omega$;
- O valor eficaz da tensão nos terminais da carga quando ela assume os valores dados anteriormente;
- O valor da potência ativa consumida pela carga quando ela assume os valores dados acima;
- O valor da potência reativa consumida pela carga quando ela assume os valores dados anteriormente.

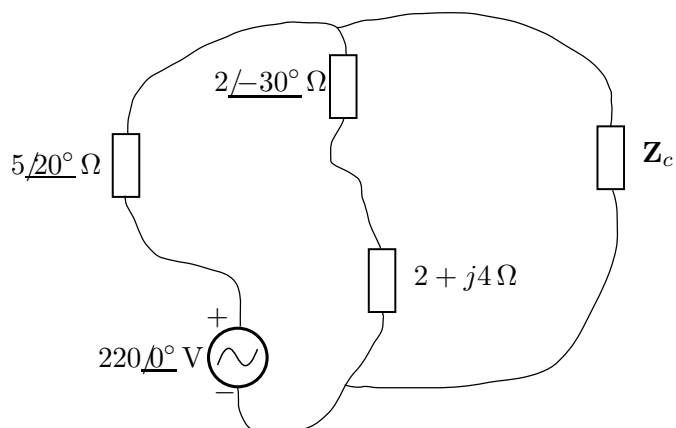


Figura 13.24: Circuitos elétricos relativos ao problema 13.6.

Capítulo 14

Energia, eficiência, correção de fator de potência e tarifação

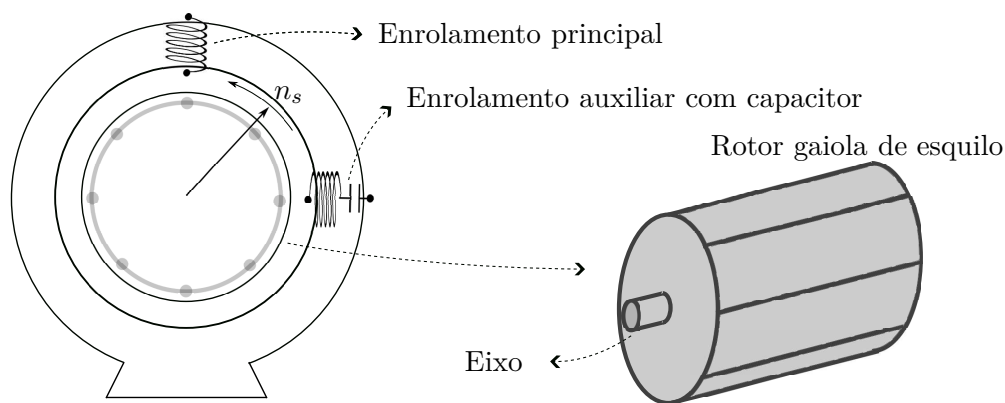
14.1 Introdução

De posse de um osciloscópio (aparelho de medição que mostra em uma tela a forma da onda da tensão) qualquer técnico pode verificar que as tomadas das residências e comércios possuem tensões cuja forma da onda é senoidal. Todos os aparelhos de uso residencial são projetados para esta forma de onda, ainda que alguns deles possuam internamente algum dispositivo que converta tensão senoidal em contínua (é o caso dos computadores, por exemplo). As indústrias possuem majoritariamente tomadas de tensão alternada, ainda que tenham também tomadas de tensão contínua, pois há equipamentos que operam somente em CC. Este capítulo mostra algumas aplicações de circuitos elétricos cuja alimentação é feita com tensão senoidal, que simplificamos chamando de tensão CA. Saliente-se que não há detalhamentos, pois as formas de construir e operar equipamentos elétricos são abordadas em disciplinas e livros específicos: nosso foco está nas leis de circuitos, cálculos de potência e estimativa de custos de energia elétrica.

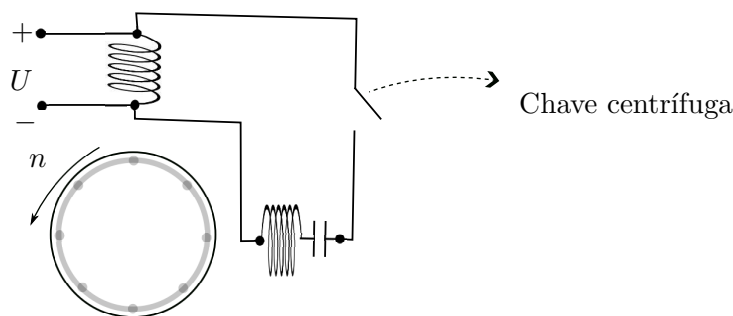
14.2 Eficiência em motor CA

É conveniente estudar um motor elétrico CA elementar para que a eficiência seja tratada de forma mais prática e, portanto, cause mais entusiasmo para o estudante. O motor elétrico é o dispositivo feito de núcleos (estator e rotor, que são descritos em breve) de ferro ou aço e que transforma energia elétrica em energia mecânica: na ponta do eixo do motor é conectada a carga mecânica, que pode ser um ventilador, uma bomba, um compressor, entre outros equipamentos. Dentre os diversos tipos de motores elétricos monofásicos, um dos mais utilizados é o de indução com o rotor tipo gaiola de esquilo e enrolamento auxiliar com capacitor de partida. A figura 14.1(a) mostra uma representação elementar do estator com os dois enrolamentos (principal e auxiliar) e do rotor em gaiola de esquilo. Como as correntes dos enrolamentos principal e auxiliar são senoidais, então os campos magnéticos criados por eles são pulsantes, porém a soma vetorial deles resulta num campo girante e isto é brevemente descrito a seguir:

Estator Parte que fica estática (parada) e na qual estão instalados dois enrolamentos: o principal e o auxiliar. O principal fica ligado todo o tempo da operação, enquanto que o auxiliar, que opera apenas durante a partida, tem um capacitor conectado em série (ver figura 14.1(a)) e é ligado apenas para criar um segundo campo magnético que estará a 90° no espaço para que a interação entre os campos magnéticos dos enrolamentos principal e auxiliar resulte num campo girante. Para que este campo girante tenha magnitude constante os fasores correntes $\bar{I}_{princ}$ e $\bar{I}_{aux}$ devem ter a mesma magnitude e estar defasados em 90° . Não se consegue estas condições na prática, mas o capacitor é posto exatamente para criar uma defasagem entre as correntes o



(a) Ilustração da construção do motor de indução monofásico.



(b) Enrolamentos principal e auxiliar em paralelo.

Figura 14.1: Motor de indução monofásico com rotor tipo gaiola de esquilo.

mais próxima possível deste valor. Veja na figura 14.1(b) que os circuitos principal e auxiliar com capacitor estão conectados em paralelo, de forma que a tensão seja a mesma, mas as correntes são defasadas. Na mesma figura está ilustrada uma chave centrífuga, que é o nome dado ao dispositivo que abre o circuito auxiliar após o rotor atingir alta velocidade, deixando somente o enrolamento principal alimentando o motor em regime permanente. O campo magnético girante resultante (ilustrado por uma seta na figura 14.1(a)) gira na chamada velocidade síncrona, que em rotações por minuto é calculada pela expressão $n_s = 120f/p$, sendo f a frequência elétrica da tensão de alimentação do motor e p a quantidade de polos magnéticos, que é determinada pela construção da máquina. O caso mais comum é de motores de indução monofásicos de quatro polos: no Brasil, cuja frequência da rede elétrica é 60 Hz, resulta numa velocidade síncrona de $n_s = 1.800$ rpm e você deve fazer as contas para conferir. Após o motor partir e o rotor atingir uma velocidade próxima a 80% da velocidade síncrona, o enrolamento auxiliar é automaticamente desconectado pela chave centrífuga;

Rotor É a parte móvel (que gira) e em vez de utilizar bobinas feitas com fios, são postas no rotor barras de alumínio curto-circuitadas. O uso das barras torna o rotor mais robusto, ou seja, mais difícil de quebrar. Os motores elétricos funcionam com base na interação entre os campos magnéticos de estator e de rotor. Se, por exemplo, o campo girante criado pelo estator gira a $n_s = 1.800$ rpm, então enquanto o rotor estiver girando numa velocidade menor haverá fluxo magnético variável atravessando as barras do rotor e, pela lei de Faraday, haverá tensão induzida ($e = d\phi/dt \neq 0$) e como o circuito do rotor é curto circuitado, haverá corrente por ele, o que cria um segundo campo magnético. O campo magnético do rotor segue o campo girante do estator, como se fosse um ímã seguindo o outro devido à força magnética. Esta interação entre os campos cria o torque magnético que faz o rotor girar. Como o campo magnético do rotor só surge por causa de uma corrente que é criada por uma tensão induzida, diz-se que este motor é de indução:

o nome tem tudo a ver com o seu princípio de funcionamento. Note que o rotor nunca alcança a velocidade síncrona, pois neste caso as barras do rotor estariam na mesma velocidade do campo girante do estator e não haveria tensão induzida, não havendo corrente circulante no circuito do rotor e, portanto, não havendo campo magnético do rotor para interagir com o do estator e criar torque. Diz-se que o motor de indução opera com escorregamento, que é a forma técnica de dizer que opera sempre com velocidade do rotor diferente da síncrona. A velocidade do rotor é comumente representada pela letra n , como mostrado na figura 14.1(b), e o escorregamento (*slip* em inglês) é definido como $s = (n_s - n)/n_s$, sendo este índice geralmente abaixo de 0,05 ou 5%. Um escorregamento de 0,025 indica que o rotor está girando numa velocidade 2,5% menor do que a velocidade síncrona, por exemplo.

Mais detalhes são omitidos, pois o propósito é o de explicar o básico, mas vale a pena citar que o motor de indução monofásico consegue continuar operando mesmo após o circuito auxiliar ser desligado, desde que o rotor já esteja girando. Existem outras formas de fazer o motor de indução monofásico partir, mas aqui foi dada uma breve descrição do tipo mais comum, que é popularmente chamado de *motor de indução monofásico com capacitor de partida*.

O motor de indução monofásico está presente em nossas casas em muitos equipamentos como, por exemplo, geladeiras, máquinas de lavar roupa, ares condicionados, entre outros. No meio industrial ele também é utilizado, porém somente para acionar cargas mecânicas de pequena potência. As cargas industriais de elevada potência são geralmente acionadas por motores de indução trifásico com rotor também construído em gaiola. Como o motor de indução monofásico é muito utilizado, é dada especial atenção a ele para tratar da eficiência e potência consumida por um dispositivo alimentado com tensão alternada, mas as equações de eficiência são válidas para todos os outros dispositivos também.

Como já foi tratado na seção 7.4, a eficiência η (também chamada de rendimento) é a relação entre potência de saída P_s e a potência de entrada P_e , que matematicamente pode ser escrita como:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \quad \text{ou} \quad \eta\% = \frac{P_s}{P_e} \times 100 \quad (14.1)$$

Note que na equação (14.1) estão presentes os valores das potências relacionadas com o desenvolvimento de trabalho, ou seja, a potência de saída (que é a potência mecânica que está no eixo girando a carga mecânica) e a potência ativa de entrada, que é consumida da rede pelo motor. Parte desta potência ativa consumida pelo motor será perdida em forma de calor (efeito joule devido à passagem de corrente nos fios dos enrolamentos, pelo atrito do rotor com outras partes, ventilação forçada e pelas perdas magnéticas). As perdas P_p no motor de indução são calculadas por:

$$P_p = P_e - P_s \quad (14.2)$$

Vale a pena lembrar que o motor de indução é construído com enrolamentos e, portanto, seu fator de potência é indutivo: somente na partida há presença do efeito do capacitor no enrolamento auxiliar, mas isto dura alguns segundos até o circuito auxiliar ser desconectado pela chave centrífuga. Como as equações de potência monofásica já foram tratadas no capítulo 11, o estudante deve estar preparado para compreender os exemplos 14.1 e 14.2.

Exemplo 14.1. Qual é o módulo da corrente elétrica de um motor de indução monofásico alimentado com uma tensão de 127 V que opera com potência de saída (de eixo) 0,5 hp, rendimento de 60% e fator de potência de 0,7 indutivo?

Solução:

De início calcula-se o valor da potência de saída na unidade watt, assim tem-se:

$$P_s = 0,5 \text{ hp} \times \frac{745,7 \text{ W}}{1 \text{ hp}} = 372,85 \text{ W}$$

Agora precisa-se calcular a potência elétrica de entrada (potência ativa consumida pelo motor), que é:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{P_s}{P_e} \\ P_e &= \frac{P_s}{\eta} \\ P_e &= \frac{372,85}{0,6} \\ P_e &= 621,42 \text{ W}\end{aligned}$$

Finalmente pode-se calcular o módulo da corrente elétrica do motor de indução ($|\bar{I}|$), utilizando também o valor do fator de potência ($\cos(\phi)$) e o valor da tensão em seus terminais ($|\bar{U}|$), como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}P_e &= |\bar{U}| |\bar{I}| \cos(\phi) \\ |\bar{I}| &= \frac{P_e}{|\bar{U}| \cos(\phi)} \\ |\bar{I}| &= \frac{621,42}{127 \times 0,7} \\ |\bar{I}| &= 6,99 \text{ A}\end{aligned}$$

□

Exemplo 14.2. Para um motor de indução monofásico alimentado com tensão de 220 V e operando com rendimento de 75%, corrente elétrica de 7,5 A e potência de saída (de eixo) de 1 hp, calcule o fator de potência.

Solução:

De início calcula-se o valor da potência de saída em watt, assim tem-se:

$$P_s = 1 \text{ hp} \times \frac{745,7 \text{ W}}{1 \text{ hp}} = 745,7 \text{ W}$$

A potência ativa consumida pelo motor de indução monofásico é:

$$\begin{aligned}\eta_{\%} &= \frac{P_s}{P_e} \times 100 \\ P_e &= \frac{P_s \times 100}{\eta_{\%}} \\ P_e &= \frac{745,7 \times 100}{75} \\ P_e &= 994,27 \text{ W}\end{aligned}$$

Sabendo os valores dos módulos da tensão nos terminais ($|\bar{U}|$), da corrente drenada ($|\bar{I}|$) e da potência elétrica de entrada (P_e), o valor do fator de potência ($\cos(\phi)$) pode ser encontrado como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}P_e &= |\bar{U}| |\bar{I}| \cos(\phi) \\ \cos(\phi) &= \frac{P_e}{|\bar{U}| |\bar{I}|} \\ \cos(\phi) &= \frac{994,27}{220 \times 7,5} \\ \cos(\phi) &= 0,6\end{aligned}$$

Outra maneira de resolver a questão é utilizando o valor da potência aparente do motor (S_e): o subscrito é somente para indicar que é um valor de entrada. Procedendo com os cálculos:

$$S_e = |\bar{U}||\bar{I}| = 220 \times 7,5 = 1\,650 \text{ VA}$$

Agora o fator de potência pode ser calculado, como mostrado a seguir:

$$\cos(\phi) = \frac{P_e}{S_e} = \frac{994,27}{1\,650} = 0,6$$

□

Videoaula 14.1 (Corrente em motor CA monofásico). Para ver o desenvolvimento dos cálculos de corrente em um motor CA monofásico acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/DHkWw9FDgUY>



14.3 Correção do fator de potência

Conforme mostrado nos capítulos 10 e 11 os circuitos elétricos com tensões e correntes alternadas podem ter comportamento capacitivo, indutivo ou resistivo. Dentre os dispositivos elétricos, um dos mais comuns é o motor de indução que foi apresentado na seção anterior e que possui comportamento indutivo¹. Há lâmpadas modernas que usam reatores, que são dispositivos bobinados e, portanto, também possuem fator de potência indutivo. Dispositivos como o chuveiro elétrico, fornos elétricos e as lâmpadas incandescentes (atualmente proibidas de serem comercializadas devido à baixa eficiência) possuem comportamento puramente resistivo.

Uma instalação elétrica com fator de potência unitário, ou seja, que consuma apenas potência ativa, converte toda a energia elétrica em alguma outra forma de energia. Porém, geralmente as residências, os estabelecimentos comerciais e as indústrias possuem equipamentos com características indutivas muitas que vezes devem ter o seu fator de potência (FP) corrigido. Atualmente apenas grandes consumidores precisam ter o seu FP corrigido para valores maiores ou iguais a 0,92 para não pagar uma taxa adicional, mas este valor de referência ainda é uma recomendação das normas das concessionárias de energia elétrica para pequenas instalações: caso o FP seja baixo, parte significativa

¹Motores síncronos também são construídos com bobinas, mas podem ter comportamento indutivo ou capacitivo. Para o motor de indução com rotor em gaiola é correto afirmar que ele sempre possui fator de potência indutivo, pois tem bobina no estator e enrolamento em gaiola no rotor. Noutras disciplinas mais específicas do seu curso maiores detalhes serão apresentados.

da corrente será drenada pela carga sem gerar trabalho. Veja na equação a seguir que se o FP (lembre-se que $FP = \cos(\phi)$) é baixo, então para uma potência ativa constante a corrente drenada pela carga se eleva:

$$|\bar{I}| \uparrow = \frac{P}{|\bar{U}| \cos(\phi) \downarrow} \quad (14.3)$$

Para finalizar a discussão dos motivos pelos quais é desejável ter fator de potência próximo ao unitário, pode-se salientar que se todas as cargas possuísem fator de potência baixo, elas consumiriam muita potência reativa (que não realiza trabalho), assim, grande parte da potência aparente do gerador simplesmente não serviria para gerar nenhum tipo de benefício social, pois sua energia não seria transformada em produtos ou qualquer outra forma útil. É desejável também ter-se menores valores de corrente elétrica nas linhas de transmissão e de distribuição, para que os fios escolhidos sejam de menor diâmetro e, como consequência, sejam mais baratos. Se, além da potência ativa, a carga consome muita potência reativa, a corrente elétrica drenada e, portanto, que passa pelas linhas de transmissão e de distribuição serão maiores, o que obrigaria a concessionária a desenvolver toda a rede com fios de diâmetro maior e mais caros: são sempre os consumidores que pagam pelas melhorias que as concessionárias de energia elétrica fazem, lembre-se disso.

Entendidos os motivos pelos quais é conveniente que as cargas possuam FP elevado, o conteúdo a ser explorado a partir de agora tratará dos procedimentos para corrigir o FP de uma carga. Muitas vezes este mesmo procedimento é chamado de *compensação de reativos*, pois deve-se compensar de alguma maneira o excesso de potência reativa consumida por uma carga de baixo FP. Em geral, as cargas possuem comportamento indutivo, assim sendo, o uso de capacitores é o meio mais comum para corrigir o FP de uma instalação.

Será considerado que a carga é representada por uma resistência e por uma reatância indutiva em série e é alimentada por uma tensão $\bar{U} = U_n$, sendo que U_n é o valor eficaz nominal de tensão para o qual os dispositivos são projetados para operar. Há duas formas de se aumentar o fator de potência:

1. Colocando uma reatância capacitiva em série (não utilizada na prática);
2. Colocando uma reatância capacitiva em paralelo (utilizada na prática).

A primeira opção não é conveniente, pois haverá uma queda de tensão sobre a reatância capacitiva e a tensão da carga não será a nominal, neste cenário o dispositivo não funcionará adequadamente (ver figura 14.2(a)). A segunda opção é colocar a reatância capacitiva em paralelo e neste cenário não há alteração no valor da tensão nos terminais da carga, que continuará sendo o valor nominal (ver figura 14.2(b)).

É necessário, portanto, que se encontre o valor da capacitância que ligada em paralelo com a carga forneça uma quantidade de potência reativa suficiente para que toda a instalação (capacitor e carga) operem com o valor de fator de potência desejado. No caso de se desejar que a instalação opere com fator de potência unitário, então a potência reativa fornecida pelos capacitores deve ser igual a consumida pela carga. Os procedimentos para a correção do fator de potência são mostrados nos exemplos 14.3 e 14.4. Na seção 14.4 será tratado do custo no caso de uma instalação não conseguir ter seu fator de potência maior ou igual a 0,92.

Exemplo 14.3. Uma instalação monofásica, alimentada com uma tensão de 127 V e 60 Hz, consome 20 kW com um fator de potência de 0,85 atrasado (indutivo). Determine o capacitor que deve ser posto em paralelo com a instalação para que o fator de potência seja unitário.

Solução:

Como se deseja que o fator de potência seja unitário, então o capacitor deve fornecer a mesma potência reativa Q_{cap} consumida pela carga Q_c . O valor do ângulo de potência ϕ é:

$$\phi = \arccos(0,85) = 31,79^\circ$$

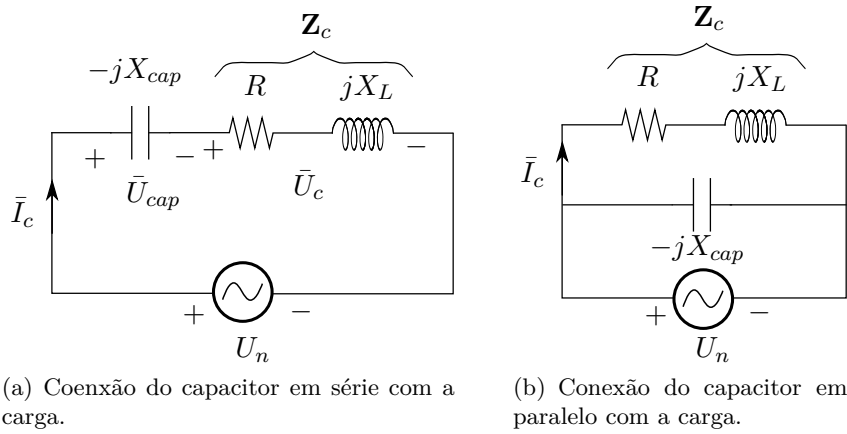


Figura 14.2: Conexão do capacitor para correção do fator de potência. O subscrito *cap* indica grandezas relacionadas ao capacitor e o subscrito *c* indica grandezas relacionadas à carga.

Do triângulo de potências da carga é possível encontrar o valor de Q_c :

$$\begin{aligned}\tan(\phi) &= \frac{Q_c}{P_c} \\ Q_c &= \tan(\phi) \times P_c \\ Q_c &= \tan(31,79^\circ) \times 20\,000 \\ Q_c &= 0,62 \times 20\,000 \\ Q_c &= 12\,395 \text{ VAr}\end{aligned}$$

Este é o valor de potência reativa que deve ser fornecido pelo capacitor. Como é conhecida também a tensão nos terminais do capacitor, então pode-se determinar o valor da reatância capacitiva como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}Q_{cap} &= \frac{|\bar{U}_{cap}|^2}{X_{cap}} \\ X_{cap} &= \frac{|\bar{U}_{cap}|^2}{Q_{cap}} \\ X_{cap} &= \frac{(127)^2}{12\,395} \\ X_{cap} &= 1,3 \, \Omega\end{aligned}$$

O valor da capacitância C depende da frequência da alimentação, que é 60 Hz. O valor de C pode ser encontrado através de:

$$\begin{aligned}X_{cap} &= \frac{1}{2\pi f C} \\ C &= \frac{1}{2\pi f X_{cap}} \\ C &= \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 1,3} \\ C &= 0,0020404 \text{ F} \\ C &= 2,04 \text{ mF}\end{aligned}$$

O comum não é se fabricar um capacitor com o valor de capacitância específico calculado no projeto. Escolhe-se entre os comercialmente disponíveis que possuem a tensão nominal desejada,

aquele que possua capacitância de valor próximo ao calculado. Obviamente, o capacitor selecionado não deve ter capacitância muito maior que a calculada, pois neste caso o FP pode ficar excessivamente capacitivo, nem muito menor que a calculada, senão o FP pode ficar ainda bastante indutivo. Outra solução é empregar vários capacitores associados para que o valor da capacitância equivalente seja o desejado. Quando vários capacitores são utilizados em conjuntos chama-se toda a associação de *banco de capacitores*.

□

Exemplo 14.4. Uma instalação monofásica, alimentada com uma tensão de 127 V e 60 Hz, consome 25 kW com um fator de potência de 0,8 atrasado. Qual o valor da capacitância do capacitor que deve ser posto em paralelo com a instalação para que o fator de potência seja de pelo menos 0,92 atrasado?

Solução:

Fator de potência atrasado é outra forma de se referir ao fator de potência indutivo, que possui fasor corrente atrasado em relação ao fasor tensão. Para solucionar esta questão precisa-se saber o valor da potência reativa atualmente consumida pela instalação (Q_{cA}) e o valor da potência reativa que deve ser consumida para que o fator de potência fique em 0,92 (Q_{cD}), como é desejado. A diferença entre o que é consumido atualmente para o que se deseja é fornecida pelo capacitor (Q_{cap}).

O valor do ângulo de potência ϕ_{cA} é:

$$\phi_{cA} = \arccos(0,8) = 36,87^\circ$$

Do triângulo das potências, encontra-se que:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_{cA}) &= \frac{Q_{cA}}{P_c} \\ Q_{cA} &= P_c \times \tan(\phi_{cA}) \\ Q_{cA} &= 25\,000 \times \tan(36,87^\circ) \\ Q_{cA} &= 25\,000 \times 0,75 \\ Q_{cA} &= 18\,750 \text{ VAr}\end{aligned}$$

É desejado que a carga continue trabalhando da mesma maneira, ou seja, consumindo a mesma potência ativa (já que a tensão nos seus terminais não é alterada, pois o capacitor é posto em paralelo) altera-se apenas o valor do fator de potência da instalação que, depois de instalado o capacitor, deve ser 0,92. Daí tem-se que o valor de ϕ_{cD} é:

$$\phi_{cD} = \arccos(0,92) = 23,07^\circ$$

Do triângulo das potências, encontra-se:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_{cD}) &= \frac{Q_{cD}}{P_c} \\ Q_{cD} &= P_c \times \tan(\phi_{cD}) \\ Q_{cD} &= 25\,000 \times \tan(23,07^\circ) \\ Q_{cD} &= 25\,000 \times 0,426 \\ Q_{cD} &= 10\,650 \text{ VAr}\end{aligned}$$

Como dito, a diferença entre o valor de potência reativa atual (que faz o fator de potência ser 0,8) e a desejada (que faz o fator de potência ser 0,92) tem de ser fornecida pelo capacitor, portanto, Q_{cap} :

$$\begin{aligned}Q_{cap} &= Q_{cD} - Q_{cA} \\ Q_{cap} &= 18\,750 - 10\,650 \\ Q_{cap} &= -8\,100 \text{ VAr}\end{aligned}$$

Q_{cap} é negativo, pois assim foi definido quando a potência é fornecida, o que ocorre com circuitos capacitivos. Sabendo o valor da potência reativa que o capacitor deve fornecer e que o valor da tensão em seus terminais é de 127 V, já que ele será ligado em paralelo com a carga, então encontra-se o valor da reatância capacitiva X_{cap} a seguir:

$$Q_{cap} = -\frac{|\bar{U}|^2}{X_{cap}}$$

$$X_{cap} = -\frac{|\bar{U}|^2}{Q_{cap}}$$

$$X_{cap} = -\frac{(127)^2}{(-8100)}$$

$$X_{cap} = 1,99 \Omega$$

A capacitância agora pode ser encontrada, como mostrado a seguir:

$$X_{cap} = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$C = \frac{1}{2\pi fX_{cap}}$$

$$C = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 1,99}$$

$$C = 0,00133 \text{ F}$$

$$C = 1,33 \text{ mF}$$

Para garantir que o fator de potência seja o desejado, o capacitor deve possuir capacitância maior ou igual a 1,33 mF, ou seja, $C \geq 1,33 \text{ mF}$. Mais uma vez deve ser lembrado que na seleção do capacitor deve-se escolher um que opere com tensão nominal de magnitude de 127 V e frequência de 60 Hz.

□

Videoaula 14.2 (Correção do fator de potência em rede CA monofásica). Para ver o desenvolvimento dos cálculos da correção do fator de potência em rede elétrica CA monofásica acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/21AyzJ2x7mc>



14.4 Energia e tarifação em sistemas elétricos CA

No capítulo 7 foi discutido como calcular o custo de energia elétrica no caso de um consumidor alimentado em tensão contínua. Estes sistemas CC existem em indústrias e de fato é possível saber o custo com energia elétrica dos dispositivos alimentados por uma rede CC dentro de uma indústria: muitas delas possuem redes elétricas internas em tensões CC da mesma forma que possuem redes internas em CA com tensões diversas, sendo algumas para alimentar prédios administrativos e outras para alimentar equipamentos industriais. É conveniente, portanto, que se estude como se faz o cálculo do custo de energia elétrica em sistemas CA, inclusive considerando o pagamento de multa pelo baixo fator de potência. Lembre-se que pequenos consumidores não pagam estas multas, mas vale como exercício já que a única diferença é a maior potência das instalações que estão submetidas à legislação que as obrigam a manter o fator de potência maior ou igual a 0,92 para não pagar a referida multa.

Na prática as medições para fins de tarifação se dão em intervalos de 15 minutos em 15 minutos: os custos parciais são somados para se encontrar o custo mensal. Aqui, pelo fato de ser um texto introdutório, será considerado que são conhecidos os valores médios de consumo dos equipamentos e que estes valores não se alteram durante todo o período em avaliação. Então, tendo o valor médio da potência ativa P das cargas, pode-se calcular a energia elétrica consumida E num período Δt utilizando a equação a seguir:

$$E = P \times \Delta t \quad (14.4)$$

Tendo em mente que a unidade de energia pela qual os clientes são cobrados é o $\text{kW} \times \text{h}$, então deve-se colocar a potência P em kW e o tempo em horas. A tarifa de energia elétrica é cobrada como unidade monetária por unidade de energia consumida, então no Brasil tem-se a tarifa $T_{R\$}$ tem unidade de $\text{R\$}/(\text{kW} \times \text{h})$, assim sendo o custo de energia elétrica $C_{R\$}$ é dado por:

$$C_{R\$} = T_{R\$} \times E \quad (14.5)$$

Para que o cliente seja desestimulado a operar com baixo FP existe uma cobrança por consumo/fornecimento excessivo de potência reativa. Este valor adicional é calculado de acordo com a equação:

$$C_{\text{exc-R\$}} = C_{R\$} \times \left(\frac{0,92}{FP} - 1 \right) \quad (14.6)$$

A análise da equação (14.6) mostra que:

- se $FP = 0,92$ nenhum custo excedente é cobrado, pois o cliente obedeceu a determinação normativa;
- se o FP da instalação é menor que o mínimo regulamentado, $FP < 0,92$, então é cobrado um valor adicional na conta. Este valor depende também do custo por consumo $C_{R\$}$, de forma que quanto mais energia se consome mais se paga pelo baixo fator de potência;
- se $FP > 0,92$ o custo daria negativo, o que pode indicar para alguém desavisado que o consumidor ganhará dinheiro, mas a equação só é válida para $FP \leq 0,92$. Então quando $FP > 0,92$ nenhum custo ou ganho é gerado para o consumidor.

Coisa importante: o fator de potência que paga pelo excedente é $FP < 0,92$ indutivo ou capacitivo. É necessário dar esta ênfase, pois a maioria das cargas é indutiva e capacitores são empregados para corrigir o fator de potência, porém pode-se ter o caso de cargas muito capacitivas (linhas de trem elétrico, por exemplo) na qual reatores serão empregados para corrigir o fator de potência neste caso. *Reator* é o nome dado ao indutor utilizado em sistemas elétricos de potência.

A conta de energia elétrica depende, portanto, do consumo de energia elétrica e do excedente por baixo fator de potência. Pode-se escrever:

$$C_{\text{total-R\$}} = C_{R\$} + C_{\text{exc-R\$}} \quad (14.7)$$

Para que o entendimento seja pleno um exemplo é apresentado na sequência.

Exemplo 14.5. Se uma instalação residencial consome em média uma potência de 25 kW com fator de potência 0,8 indutivo durante 8h/dia (todos os dias), determine o tempo aproximado em meses para se ter o retorno do investimento, caso se decida corrigir o fator de potência para 0,92 indutivo com um banco capacitivo que custou R\$ 6.000,00.

Dados adicionais:

- Tarifa de energia elétrica de R\$0,75/(kW × h);
- Considere que um mês tem 30 dias.

Solução:

É necessário lembrar que a correção do fator de potência para 0,92 faz com que a economia se dê exclusivamente sobre o valor pago pelo excesso de consumo de potência reativa, mas o consumo de potência ativa continua sendo pago em qualquer cenário. Então a busca é pelo valor gasto com este excedente, pois este valor será nulo após FP tornar-se 0,92. A solução é feita a seguir em etapas para melhor entendimento:

1. A energia mensal consumida é:

$$E = P \times \Delta t$$

$$E = (25 \text{ kW}) \times \left(\frac{8 \text{ h}}{\text{dia}} \times 30 \text{ dias} \right)$$

$$E = 6\,000 \text{ kW} \times \text{h}$$

2. O custo mensal com energia elétrica consumida é:

$$C_{\text{R\$}} = T_{\text{R\$}} \times E$$

$$C_{\text{R\$}} = \left(\frac{\text{R\$}0,75}{\text{kW} \times \text{h}} \right) \times (6\,000 \text{ kW} \times \text{h})$$

$$C_{\text{R\$}} = \text{R\$}4.500,00$$

3. O custo mensal com excedente de potência reativa é:

$$C_{\text{exc-R\$}} = C_{\text{R\$}} \times \left(\frac{0,92}{\text{FP}} - 1 \right)$$

$$C_{\text{exc-R\$}} = \text{R\$}4.500,00 \times \left(\frac{0,92}{0,8} - 1 \right)$$

$$C_{\text{exc-R\$}} = \text{R\$}675,00$$

4. O tempo para retorno do investimento T_{RET} é obtido dividindo o custo do banco pelo custo mensal pelo consumo excedente de pot. reativa:

$$T_{\text{RET}} = \frac{\text{Custo do banco capacitivo em R\$}}{\text{Custo mensal do excedente de pot. reativa em R\$/mês}}$$

$$T_{\text{RET}} = \frac{\text{Custo do banco capacitivo}}{C_{\text{exc-R\$}}}$$

$$T_{\text{RET}} = \frac{\text{R\$}6.000,00}{\text{R\$}675,00/\text{mês}}$$

$$T_{\text{RET}} = 8,89$$

$$T_{\text{RET}} = 9 \text{ meses} \quad (\text{resposta})$$

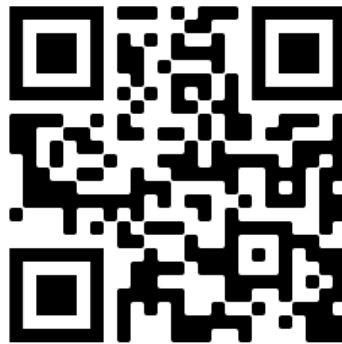
No enunciado foi pedido o tempo em meses, então deve-se aguardar 9 meses para que o retorno se dê: a resposta não é um número fracionário, deve-se aproximar para o valor inteiro acima. Outra coisa importante: no mundo profissional utiliza-se a sigla ROI, que em inglês é *return on investment* e em português chamamos de *retorno sobre o investimento*. O tempo para obter o ROI em inglês é chamado de *payback* e não há um termo curto equivalente em português, então é comum que seja utilizado no meio profissional o termo *payback* mesmo. Se você estivesse numa reunião de negócios você diria “o *payback* é de 9 meses”.

Até o período de 9 meses o investimento está sendo amortizado e a partir deste prazo começa a se ter ganho financeiro graças a instalação do banco capacitivo. Saliente-se que esta é uma avaliação rápida do investimento, pois não foram considerados os custos de manutenção do banco e nem a desvalorização monetária (inflação), mas dá uma boa ideia do motivo pelo qual é conveniente investir na correção do fator de potência.

□

Videoaula 14.3 (Tarifação da energia elétrica em rede CA monofásica). Para ver exemplo do cálculo de conta de energia elétrica em rede elétrica CA acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/_gTbVZQHjpI



14.5 Resumo do capítulo

Um breve resumo dos principais tópicos tratados no presente capítulo é apresentado a seguir:

- O motor de indução monofásico consome energia elétrica da fonte e desenvolve potência mecânica para acionar uma carga mecânica conectada na ponta do eixo do rotor;
- O motor de indução monofásico com rotor em gaiola, tipo mais comum, tem fator de potência indutivo;
- Duas cargas que consomem a mesma potência ativa terão correntes diferentes, se tiverem fatores de potência diferentes. A de menor fator de potência terá maior corrente sendo drenada da fonte/rede elétrica;
- As normas das concessionárias de energia elétrica recomendam que o fator de potência dos consumidores seja próximo de um. Grandes consumidores pagam multa se o fator de potência for menor que 0,92 (capacitivo ou indutivo) de acordo com as regras vigentes;
- Os capacitores para correção de fator de potência são instalados em paralelo à carga que se pretende corrigir o fator de potência.

Problemas propostos

Problema 14.1. Qual é o rendimento de um motor de indução monofásico cuja potência de saída no eixo é de 2 hp que quando alimentado com uma tensão de 220 V drena uma corrente elétrica de 8,9 A e possui um fator de potência de 0,85.

Problema 14.2. Um motor de tensão de 220 V possui potência de perdas de 0,5 kW e potência de eixo de 2 hp. Sabendo que o motor consome 0,8 kVAR de potência da rede, qual é o valor do seu fator de potência?

Problema 14.3. Qual é o valor eficaz da corrente elétrica drenada da rede pelo motor do problema 14.2?

Problema 14.4. Determine a potência complexa de um motor monofásico que possui potência mecânica de saída de 1 hp, rendimento de 85% e fator de potência de 0,75.

Problema 14.5. Um motor monofásico possui uma potência de eixo de 0,5 hp, rendimento de 60%, fator de potência 0,8 e é alimentado com uma tensão de 220 V. Para este motor, determine:

- (a) A potência ativa consumida da rede;
- (b) A potência reativa consumida da rede;
- (c) O valor eficaz da corrente elétrica drenada da rede;

Problema 14.6. Uma instalação elétrica em 220 V e 60 Hz, drena uma corrente elétrica de 12 A e opera com um fator de potência de 0,83 (indutivo). Determine o valor da capacitância que deve ser instalada para corrigir o fator de potência da instalação para 0,92 (indutivo).

Problema 14.7. Uma instalação elétrica de 5 kW possui fator de potência 0,87. Sabendo que esta instalação é em 380 V e 60 Hz, especifique o valor da capacitância do capacitor que faz com que o fator de potência seja unitário.

Problema 14.8. Uma indústria possui um novo tipo de forno indutivo (utilizado para aquecer e derreter metais) que opera com fator de potência de 0,6 e rendimento de 70%. A potência térmica de saída do forno é de 15 kW. A rede elétrica na qual este forno está conectado é de 220 V e 60 Hz. É necessário corrigir o fator de potência para pelo menos 0,92 indutivo. Se estão disponíveis para aquisição os seguintes modelos de capacitores (todos feitos para a tensão de 220 V), então indique o modelo e as quantidades que devem ser postos em paralelo para deixar o fator de potência mais próximo possível do fator de potência desejado.

Obs.: use 5 casas decimais nas contas.

Modelo A: 430 micro Farad

Modelo B: 330 micro Farad

Modelo C: 230 micro Farad

- (a) Três unidades do modelo A
- (b) Duas unidades do modelo B e duas unidades do modelo C
- (c) Três unidades do modelo B e uma unidade do modelo C
- (d) Duas unidades do modelo A e uma unidade do modelo C
- (e) Três unidades do modelo C

Problema 14.9. Uma instalação elétrica de uma pequena indústria consome 25 kW com fator de potência 0,8 indutivo. Como haverá compras de novos equipamentos decidiu-se corrigir o fator de potência para o valor unitário, de forma que nenhuma multa seja paga após a colocação dos capacitores e nem após a chegada dos novos equipamentos. Sabe-se que a tensão da rede elétrica fornecedora é de 220 V e 60 Hz. Fazendo as contas com pelo menos 3 casas decimais, determine :

- (a) O valor aproximado da capacitância equivalente que deve possuir o banco capacitivo para corrigir o fator de potência;
- (b) O fator de potência com o banco capacitivo instalado e com os novos equipamentos que adicionam 5 kW também com fator de potência 0,8 indutivo;

Problema 14.10. Uma instalação residencial consome em média 5 kW com fator de potência 0,75 indutivo durante 12 h/dia (usada todos os dias). Determine o custo aproximado que deve ter o banco capacitivo para que o tempo de retorno do investimento seja de 12 meses, sabe-se que a tarifa de energia elétrica é R\$0,80/kW $\times$ h.

Problema 14.11. Refaça o problema 14.10 considerando que a tarifa é de R\$0,85/kW $\times$ h, que a instalação opera apenas nos dias úteis e que o período de retorno desejado é de 18 meses.

Parte III

Circuitos eléctricos trifásicos

Capítulo 15

Circuitos elétricos trifásicos

15.1 Introdução

Os sistemas de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica operam empregando os fundamentos de circuitos trifásicos. No Brasil e nos países que possuem grandes parques industriais a maior parte da energia elétrica é consumida por dispositivos elétricos trifásicos de grande porte, principalmente grandes motores, daí a necessidade de se entender o comportamento de grandezas elétricas como potência, tensão, corrente, entre outras, em circuitos trifásicos.

15.2 Geradores conectados em estrela (Y) e em triângulo (Δ)

Na figura 15.1 vê-se uma ilustração de um gerador síncrono trifásico elementar; a palavra trifásico será representada de forma compacta por 3Φ no decorrer do texto, mas você pode encontrar o $3f$ também noutros documentos técnicos. Ele possui duas partes merecedoras de destaque, que são o estator e o rotor, que possuem núcleos de aço ou ferro e enrolamentos, como descritos a seguir:

Rotor É a parte interna e móvel que é girada por uma fonte de potência mecânica: pode ser uma turbina hidráulica ou eólica, um motor a combustão, entre outras fontes de potência motriz. No rotor é posto o chamado *enrolamento de campo*, no qual é aplicada a tensão contínua U_{cc} . Circulará nos fios do enrolamento de campo uma corrente contínua identificada na figura como I_{cc} , chamada de *corrente de campo*. Vale a pena ressaltar que o nome campo é uma referência a campo magnético, que pode ser criado com um sistema composto por uma bobina alimentada por corrente envolta num núcleo de material magnético, geralmente ferro ou aço. A consequência da presença da corrente em um fio é o surgimento de um fluxo magnético ϕ conforme indicado na figura 15.1: a rigor o fluxo é uma grandeza escalar e não possui sentido, mas é habitual nos livros indicar o sentido do vetor campo magnético para a variável fluxo também. As grandezas descritas como tensão de campo, corrente de campo e fluxo de campo também são conhecidas como *tensão de excitação*, *corrente de excitação* e *fluxo de excitação*. Se o rotor é girado a uma velocidade n_s (que chamaremos de velocidade síncrona), então o fluxo que atravessará as bobinas do estator será variável, o que é explicado a seguir;

Estator É a parte externa e possui este nome pelo fato de ficar estática (parada). É no estator que estão postos os três enrolamentos que são concatenados (são atravessadas) pelo fluxo de excitação gerado pelo enrolamento do rotor. Este fluxo ϕ (que gira na mesma velocidade do rotor) induz tensão alternada nos enrolamentos do estator. No caso do gerador elétrico mostrado na figura, os enrolamentos são construídos de maneira que fiquem posicionados a 120° um do outro e, assim, as tensões induzidas nos enrolamentos do estator estarão também defasadas fasorialmente em 120° . A figura 15.2 mostra as formas de onda das tensões induzidas. Esta representação no tempo é utilizada na abordagem inicial, pois os fasores serão empregados posteriormente nos cálculos das tensões e correntes.

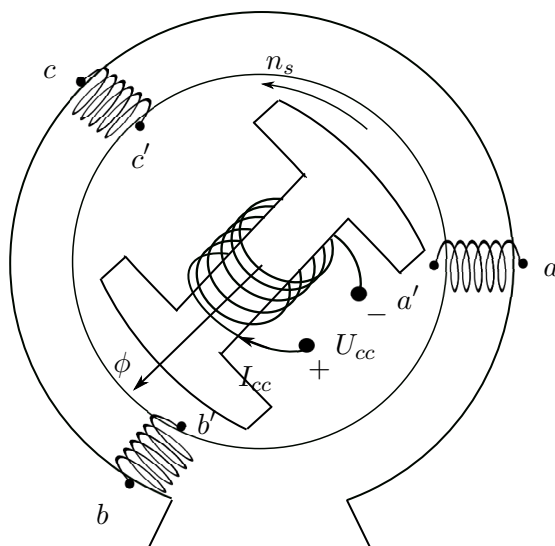


Figura 15.1: Gerador síncrono 3 Φ elementar.

As conexões dos enrolamentos de estator são feitas em Y (também chamada de conexão em *estrela*) ou em Δ (também chamada de conexão em *triângulo*) e serão descritas nas próximas seções.

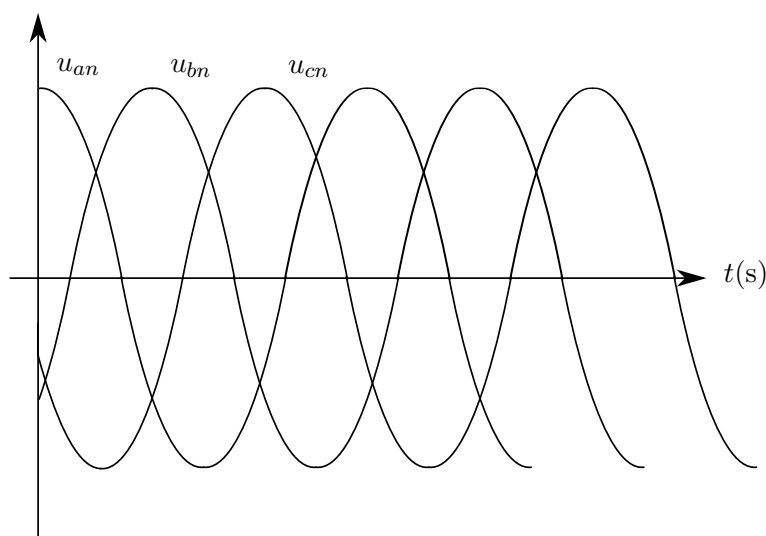


Figura 15.2: Ilustração das formas de onda de tensão defasadas 120° uma das outras.

15.2.1 Geradores equilibrados conectados em estrela ou Y

Observe na figura 15.1 que se os pontos a' , b' e c' forem conectados forma-se o chamado *neutro*. Se as tensões induzidas nos três enrolamentos do gerador forem representadas por três fontes de tensões ideais, então a representação de um gerador trifásico em Y é mostrada na figura 15.3(a). Diz-se que o gerador opera com tensões equilibradas se as tensões $\bar{U}_{an}$, $\bar{U}_{bn}$ e $\bar{U}_{cn}$ tiverem o mesmo módulo (representado por U_f) e estiverem defasadas de 120° uma das outras, como mostrado pela figura 15.3(b). As tensões $\bar{U}_{an}$, $\bar{U}_{bn}$ e $\bar{U}_{cn}$ são chamadas de tensões de fase e são tomadas entre uma fase e o neutro, sendo este representado pela letra n . Note nesta figura que a sequência é abc , já que os fasores giram no sentido anti-horário.

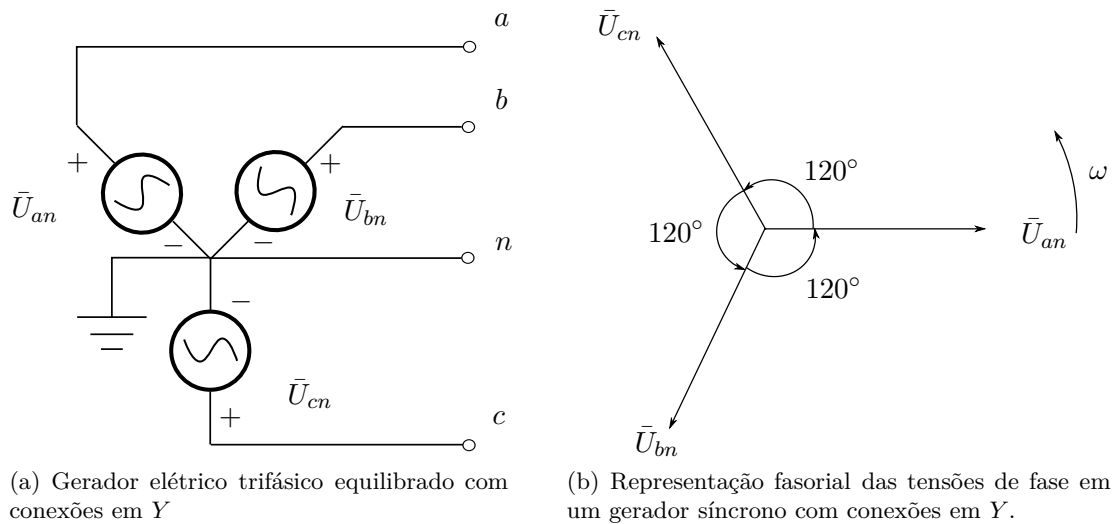


Figura 15.3: Gerador síncrono conectado em Y.

Note na figura 15.3(a) que cada terminal foi marcado com uma letra, assim têm-se os três pontos que representam os *terminais das linhas* a , b e c e o ponto definido com a letra n é chamado de *neutro*. Neste caso o ponto neutro está diretamente aterrado, porém, pode-se aterrar o neutro de maneira não direta (utilizando uma impedância) ou mesmo não aterrá-lo. Enfatiza-se novamente que o ponto neutro corresponde a conexão dos pontos a' , b' e c' das bobinas do gerador mostrado na figura 15.1. As tensões podem ser definidas como a seguir:

Tensões de fase Também chamadas de tensões de fase-neutro ou linha-neutro. São as tensões entre os pontos a , b e c e o ponto neutro. Assim sendo, têm-se três tensões de fase, que são: $\bar{U}_{an}$, $\bar{U}_{bn}$ e $\bar{U}_{cn}$.

Tensões de linha Também chamadas de tensões de fase-fase ou linha-linha, são as tensões entre dois pontos quaisquer entre os terminais das linhas. Geralmente, são consideradas as três tensões de linha $\bar{U}_{ab}$, $\bar{U}_{bc}$ e $\bar{U}_{ca}$.

Deve ser destacado que se as três tensões de fase $\bar{U}_{an}$, $\bar{U}_{bn}$ e $\bar{U}_{cn}$ são equilibradas, ou seja, possuem mesmas magnitudes e são defasadas 120° entre si, então as três tensões de linha $\bar{U}_{ab}$, $\bar{U}_{bc}$ e $\bar{U}_{ca}$ também serão equilibradas. Porém, faz-se necessário dar destaque a duas informações sobre as tensões de linha em dispositivos conectados em Y:

1. As tensões de linha $\bar{U}_{ab}$, $\bar{U}_{bc}$ e $\bar{U}_{ca}$ têm magnitudes iguais e de valor $U_l = \sqrt{3}U_f$, isto quer dizer que as tensões de linha são $\sqrt{3}$ vezes maiores que as tensões de fase;
2. As tensões $\bar{U}_{ab}$, $\bar{U}_{bc}$ e $\bar{U}_{ca}$ são defasadas 120° uma das outras e defasadas 30° em relação as tensões de fase, como mostrado na figura 15.4.

Saliente-se que estas relações de tensões de linha e de fase são válidas para qualquer dispositivo (gerador ou carga) conectado em Y.

É conveniente que o estudante já fixe neste momento que a conexão Y permite a criação do ponto neutro, pois é este ponto do circuito que será aterrado para fins de criação de outro condutor, o *condutor de aterramento*. Este é muito importante quando se trata de segurança das pessoas, animais e equipamentos.

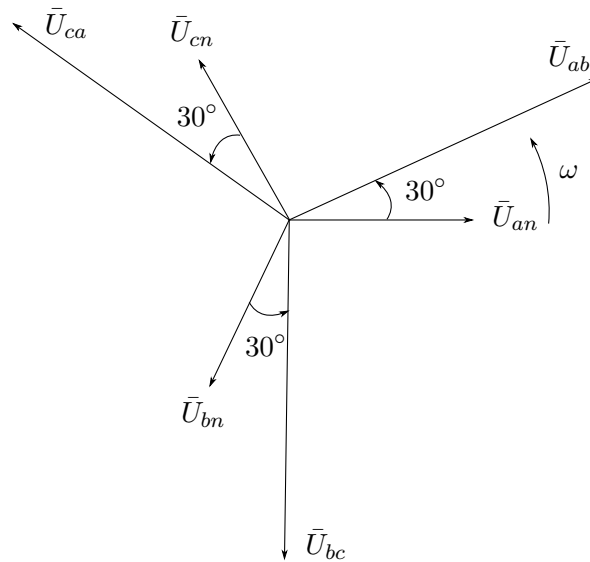


Figura 15.4: Representação fasorial das tensões de fase e de linha em um gerador síncrono com conexões em Y.

15.2.2 Geradores equilibrados conectados em triângulo ou Δ

Outra forma de se ligar as bobinas de um gerador trifásico é realizando a conexão em Δ , que é mostrada na figura 15.5(a). Neste caso deve-se verificar na ilustração da figura 15.1 que foram conectados os pontos a' com b , b' com c e c' com a . Na conexão em Δ não há ponto neutro e, portanto, não se pode realizar o aterramento de um circuito nesta configuração e isto pode ser uma restrição do uso deste tipo de conexão. Nota-se que as tensões induzidas nas fases são $\bar{U}_{ab}$, $\bar{U}_{bc}$ e $\bar{U}_{ca}$ e são, portanto, iguais às tensões de linha. Diz-se que o gerador elétrico opera com tensões equilibradas quando $\bar{U}_{ab}$, $\bar{U}_{bc}$ e $\bar{U}_{ca}$ têm mesmas magnitudes e são defasadas 120° uma das outras, como mostrado no diagrama fasorial da figura 15.5(b).

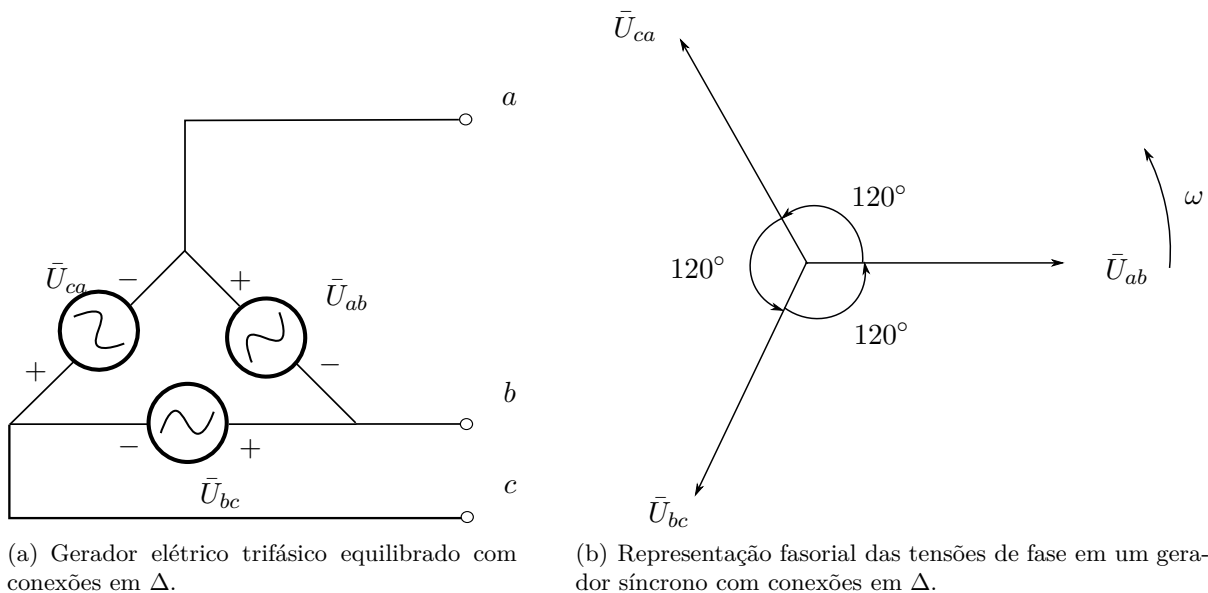


Figura 15.5: Gerador elétrico conectado em Δ .

Para identificar os conceitos mais importantes sobre um dispositivo conectado em Δ são dados dois destaques:

1. As tensões de linha e de fase têm magnitudes iguais, ou seja, $U_l = U_f$;
2. As tensões $\bar{U}_{ab}$, $\bar{U}_{bc}$ e $\bar{U}_{ca}$ são defasadas 120° uma das outras.

Foi dito que não se tem como criar o ponto neutro nesta conexão: isto é importante e deve ser fixado pelo estudante, pois este critério é importante na escolha de que tipo de conexão utilizar no projeto de um equipamento ou sistema elétrico. Lembre-se que é deste ponto neutro que, se aterrado, cria-se o condutor de aterramento, necessário à segurança de pessoas, animais e equipamentos. Um último comentário sobre aterramento: este constitui o ato de conectar de maneira correta uma parte do circuito ao planeta Terra, local no qual o potencial elétrico é seguro.

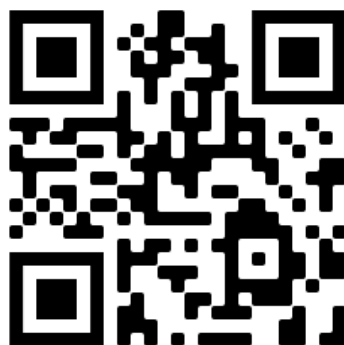
Videoaula 15.1 (Gerador trifásico conectado em Y e em Δ). Para mais detalhes do gerador síncrono conectado em estrela e em triângulo acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/cxuRR3LuQZ8>



Videoaula 15.2 (Sobre o $\sqrt{3}$ de valores de linha). Para saber de onde vem o $\sqrt{3}$ dos valores de linha em relação aos de fase (tensão de linha no Y e corrente de linha no Δ) acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/Z6TEh2QRXos>



15.3 Cargas conectadas em estrela (Y) e em triângulo (Δ)

15.3.1 Cargas equilibradas conectados em estrela (Y)

Uma carga em Y, conectada conforme mostrada na figura 15.6, é chamada de equilibrada se as três impedâncias são idênticas (em magnitude e ângulo) ou, no caso das impedâncias estarem representadas na forma retangular, as três devem possuir os mesmos valores das partes real e imaginária.

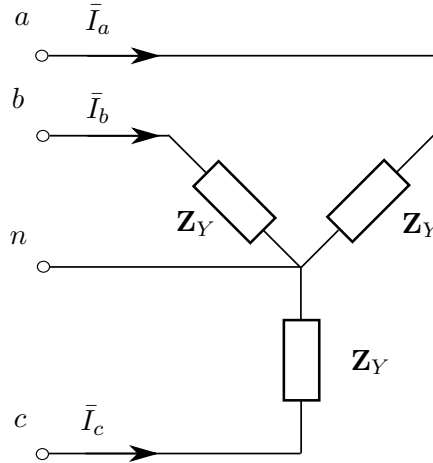


Figura 15.6: Carga trifásica equilibrada com conexões em Y.

Considerando que a carga trifásica equilibrada conectada em Y é alimentada por tensões equilibradas, então as correntes que circulam pelas fases $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ e $\bar{I}_c$ (indicadas na figura 15.6) são dadas por:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{U}_{an}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U_f \underline{0^\circ}}{Z_Y \underline{\theta_{Z_Y}}} = \frac{U_f}{Z_Y} \underline{-\theta_{Z_Y}} = I_f \underline{-\theta_{Z_Y}} \quad (15.1)$$

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{U}_{bn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U_f \underline{-120^\circ}}{Z_Y \underline{\theta_{Z_Y}}} = \frac{U_f}{Z_Y} \underline{-120^\circ - \theta_{Z_Y}} = I_f \underline{-\theta_{Z_Y} - 120^\circ} \quad (15.2)$$

$$\bar{I}_c = \frac{\bar{U}_{cn}}{\mathbf{Z}_Y} = \frac{U_f \underline{-240^\circ}}{Z_Y \underline{\theta_{Z_Y}}} = \frac{U_f}{Z_Y} \underline{-240^\circ - \theta_{Z_Y}} = I_f \underline{-\theta_{Z_Y} - 240^\circ} \quad (15.3)$$

Sendo que I_f denota a magnitude da corrente de fase. A representação fasorial destas três correntes e das tensões de fase e de linha é mostrada no diagrama fasorial da figura 15.7 para uma carga indutiva, ou seja, com corrente atrasada em relação à tensão.

A análise do diagrama fasorial da figura 15.7 permite concluir que uma carga trifásica equilibrada alimentada por tensões equilibradas possui correntes equilibradas, ou seja, de mesma intensidade I_f e defasadas 120° uma das outras. Observe na figura 15.7 que fica evidente que a carga é indutiva, pois as correntes de fase estão atrasadas em relação às suas respectivas tensões de fase. Caso a carga fosse capacitiva, as correntes de fase estariam adiantadas em relação às tensões de suas respectivas fases. Vê-se que as correntes de fase estão defasadas das tensões de fase pelo ângulo da impedância.

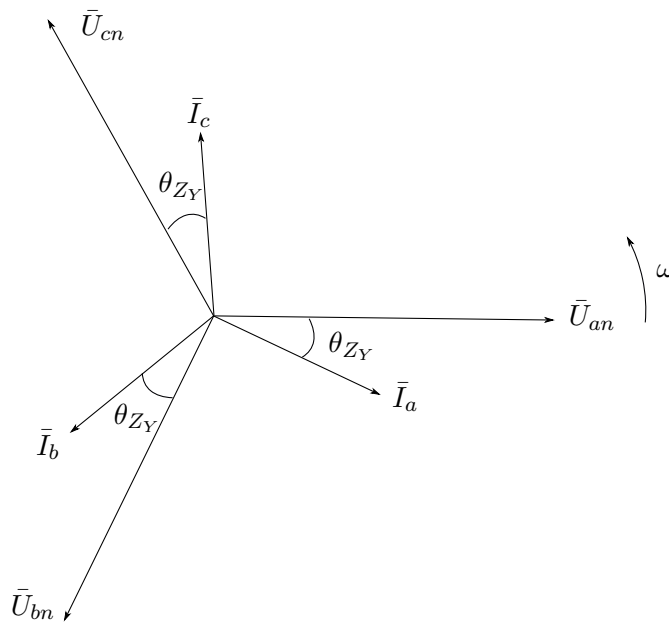


Figura 15.7: Representação fasorial das tensões e correntes de fase de um dispositivo conectado em Y.

Pode-se identificar nos dois comentários a seguir as relações mais importantes para um dispositivo conectado em Y:

1. As correntes de linha e de fase são idênticas, ou seja, $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ e $\bar{I}_c$ têm magnitudes $I_l = I_f$;
2. As tensões $\bar{U}_a$, $\bar{U}_b$ e $\bar{U}_c$ são defasadas 120° uma das outras.

Exemplo 15.1. Calcule o módulo das correntes de linha e de fase da carga 3Φ equilibrada conectada em Y. A impedância da carga é $10 + j3 \Omega$ /fase, sabendo que ela é alimentada por tensões de linha equilibradas de módulo 380 V.

Solução:

O circuito mostrado na figura 15.8 auxiliará na compreensão do enunciado e da solução.

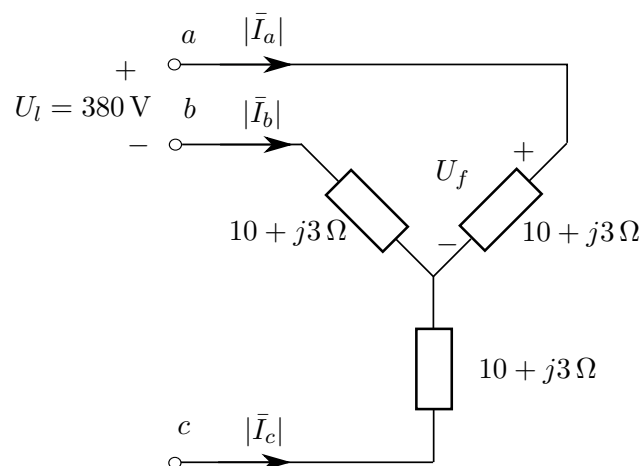


Figura 15.8: Relativo ao exemplo 15.1.

No referido circuito está indicado apenas o módulo da tensão de linha entre as fases a e b , pois sabe-se que as demais tensões de linha também possuem o mesmo módulo ($|\bar{U}_{bc}| = |\bar{U}_{ca}| = 380$ V). Os valores dos módulos das tensões de fase também serão os mesmos, por isso é indicado apenas o valor

U_f na fase a . A omissão destes valores de tensão descritos tornam a figura mais limpa, o que facilita a compreensão e também deixa claro que quando se trata de encontrar módulos de grandezas elétricas em circuitos trifásicos equilibrados, basta fazer a análise de apenas uma fase, pois nas demais os módulos serão os mesmos. Deve-se lembrar que os ângulos das tensões e correntes diferem de uma fase a outra em 120° .

O módulo da corrente de fase é encontrado a partir do conhecimento do valor do módulo da tensão de fase U_f e do módulo da impedância da carga Z_c . Ambos serão calculados na sequência.

O módulo da tensão de fase é:

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

O módulo da impedância da carga é:

$$Z_c = \sqrt{10^2 + 3^2} = 10,44 \Omega$$

O módulo da corrente que circula na fase “a” tem o mesmo valor das demais fases, portanto, $I_f = |\bar{I}_a| = |\bar{I}_b| = |\bar{I}_c|$ e seu valor é:

$$I_f = \frac{U_f}{Z_c} = \frac{220}{10,44} = 21,073 \text{ A}$$

□

Exemplo 15.2. Para uma carga trifásica equilibrada conectada em Y de valor $\mathbf{Z}_c = 5 + j2 \Omega$ /fase, alimentada por uma tensão de fase de 220 V, determine:

- Os fasores das correntes de todas as linhas;
- O diagrama fasorial contendo as tensões de fase e as correntes de linha.

Solução

Para solucionar este exemplo não será feito o desenho da carga, porém o estudante pode fazê-lo por conta própria caso tenha dúvida nos cálculos feitos a seguir:

- Para uma configuração de carga em Y , tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{an} &= 220 \angle 0^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_{bn} &= 220 \angle -120^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_{cn} &= 220 \angle -240^\circ = 220 \angle 120^\circ \text{ V} \\ \mathbf{Z}_{an} &= \mathbf{Z}_{bn} = \mathbf{Z}_{cn} = 5 + j2 \Omega\end{aligned}$$

Lembrando que nos dispositivos conectados em Y as correntes de fase e de linha são idênticas, encontra-se:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a = \bar{I}_{an} &= \frac{\bar{U}_{an}}{\mathbf{Z}_{an}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{5 + j2} = 40,85 \angle -21,8^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_b = \bar{I}_{bn} &= \frac{\bar{U}_{bn}}{\mathbf{Z}_{bn}} = \frac{220 \angle -120^\circ}{5 + j2} = 40,85 \angle -141,8^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_c = \bar{I}_{cn} &= \frac{\bar{U}_{cn}}{\mathbf{Z}_{cn}} = \frac{220 \angle -240^\circ}{5 + j2} = 40,85 \angle -218,2^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

- O diagrama fasorial relativo aos valores encontrados é mostrado na figura 15.9. Nesta figura deve-se observar que, assim como as tensões, as correntes são equilibradas e estão defasadas 120° uma em relação as outras. Deve-se observar também que a diferença angular entre uma corrente de fase e sua respectiva tensão de fase é igual ao ângulo da carga. Como neste exemplo a carga é indutiva, a corrente se encontra atrasada em relação à tensão.

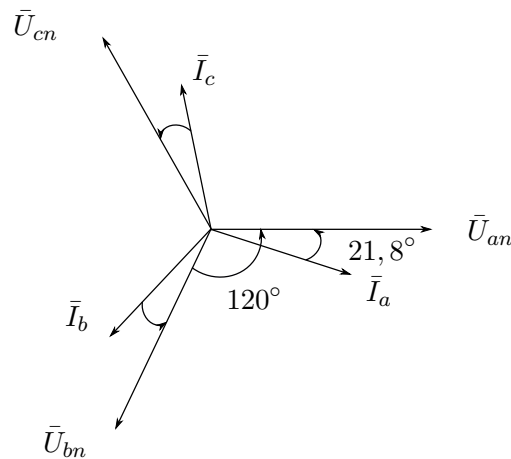
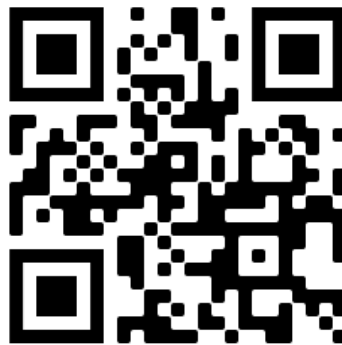


Figura 15.9: Relativo ao exemplo 15.2. Os valores dos ângulos foram omitidos para deixar a figura limpa e melhorar a visualização.

□

Videoaula 15.3 (Análise de cargas conectadas em Y). Para saber mais sobre cargas conectadas em estrela acesse a videoaula a seguir:

- https://youtu.be/_-FyTgnnlmc



Corrente elétrica que circula no fio neutro

Em um dispositivo trifásico conectado em Y que possua fio neutro (aterrado diretamente, aterrado através de uma impedância ou ligado a um outro ponto do circuito), qual é o valor da corrente que circula pelo neutro? Para responder a esta pergunta pode-se avaliar um caso particular cuja conclusão é aplicável a outras situações. O caso particular é o de uma carga trifásica puramente resistiva quando desejamos saber a corrente do condutor de neutro quando este é aterrado via impedância $\mathbf{Z}_{ater}$, como mostrado na figura 15.10(a). Utilizando a lei das correntes de Kirchhoff, encontra-se que o valor da corrente que circula pelo fio neutro $\bar{I}_n$ é:

$$\bar{I}_n = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c \quad (15.4)$$

Lembrando que trata-se de uma carga trifásica puramente resistiva equilibrada, então o diagrama fasorial é como mostrado na figura 15.10(b), no qual fica evidente que as correntes de fase e suas

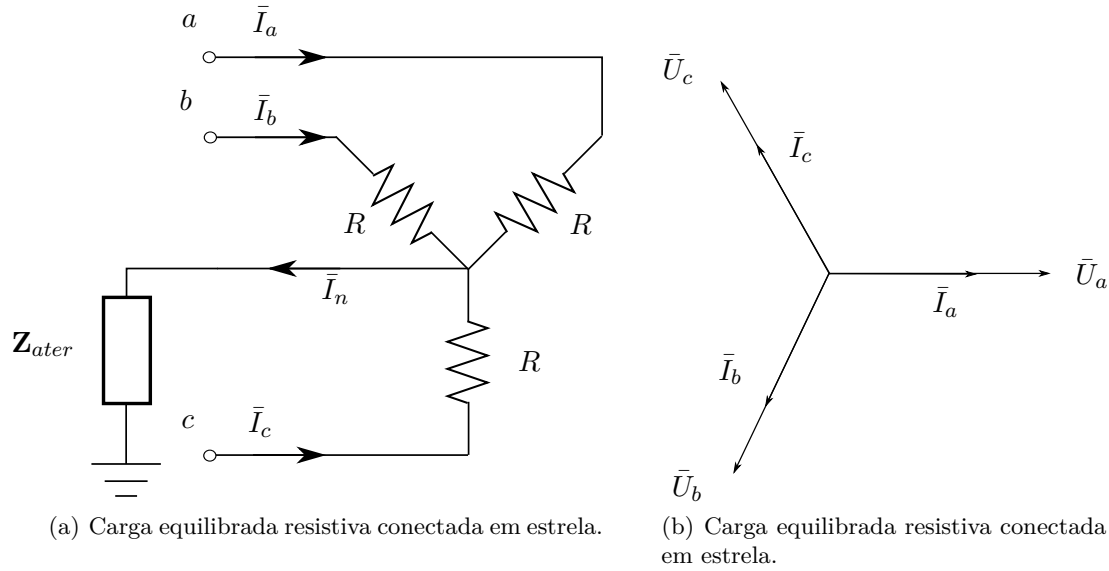


Figura 15.10: Ilustrações para avaliação da corrente circulante no fio neutro.

respectivas tensões estão em fase. Substituindo os valores dos fasores correntes de fase, que podem ser identificados no diagrama fasorial, na equação (15.4), encontra-se:

$$\bar{I}_n = \underbrace{\bar{I}_a}_{I_f \angle 0^\circ} + \underbrace{\bar{I}_b}_{I_f \angle -120^\circ} + \underbrace{\bar{I}_c}_{I_f \angle -240^\circ}$$

A seguir, transforma-se os valores em coordenadas retangulares, pois isto facilita as operações de soma e subtração, tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{I}_n &= \underbrace{I_f \cos(0^\circ) + jI_f \sin(0^\circ) + I_f \cos(-120^\circ) + jI_f \sin(-120^\circ) + I_f \cos(-240^\circ) + jI_f \sin(-240^\circ)}_{\bar{I}_c} \\ \bar{I}_n &= (I_f) + \left(-\frac{1}{2}I_f - j\frac{\sqrt{3}}{2}I_f\right) + \left(-\frac{1}{2}I_f + j\frac{\sqrt{3}}{2}I_f\right) \end{aligned}$$

O passo seguinte é rearranjar os valores reais e imaginários e desenvolver os cálculos com o propósito de simplificar ao máximo o valor da corrente de neutro como feito na sequência:

$$\begin{aligned} \bar{I}_n &= \left(I_f - \frac{1}{2}I_f - \frac{1}{2}I_f\right) + j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}I_f + \frac{\sqrt{3}}{2}I_f\right) \\ \bar{I}_n &= (I_f - I_f) + j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}I_f + \frac{\sqrt{3}}{2}I_f\right) \\ \bar{I}_n &= 0 + j0 \\ \bar{I}_n &= 0 \end{aligned}$$

A conclusão clara é que se as correntes de fase (que são iguais as de linha) são equilibradas, então não há corrente circulante no fio neutro. Apesar do cálculo ter sido feito para uma carga trifásica puramente resistiva, o resultado é válido para qualquer dispositivo trifásico equilibrado e conectado em Y, seja ele um gerador ou uma carga. Notar que $\bar{I}_n = 0$ independe do fato do fio neutro estar diretamente aterrado, aterrado através de uma impedância ou ligado a um outro ponto do circuito. No caso do fio neutro estar ligado a qualquer outro ponto do circuito, fica evidente que este fio pode ser retirado.

O fio neutro não precisa estar presente se houver garantias de que a operação é completamente equilibrada, porém boa parte dos dispositivos ligados em Y são assim conectados pelo fato de que se a operação é desequilibrada haverá circulação de corrente pelo fio neutro e dispositivos de proteção (instalados no fio neutro) podem atuar, evitando danos aos equipamentos. Circuitos com cargas trifásicos desequilibradas são tratados no capítulo 16.

Videoaula 15.4 (Corrente no neutro da conexão Y). Entenda o motivo pelo qual a corrente no neutro é nula numa conexão em triângulo equilibrada acessando a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/iE7LhhCvock>



15.3.2 Cargas equilibradas conectados em triângulo (Δ)

Uma carga em Δ , conectada conforme mostrada na figura 15.11, é dita equilibrada quando as três impedâncias são idênticas (em magnitude e ângulo). Considerando que a carga trifásica equilibrada conectada em Δ é alimentada por tensões equilibradas, então as correntes que circulam pelas fases são:

$$\bar{I}_{ab} = \frac{\bar{U}_{ab}}{\bar{Z}_{\Delta}} = \frac{U_f \angle 0^\circ}{Z_{\Delta} \angle \theta_{Z_{\Delta}}} = \frac{U_f}{Z_{\Delta}} \angle -\theta_{Z_{\Delta}} = I_f \angle -\theta_{Z_{\Delta}} \quad (15.5)$$

$$\bar{I}_{bc} = \frac{\bar{U}_{bc}}{\bar{Z}_{\Delta}} = \frac{U_f \angle -120^\circ}{Z_{\Delta} \angle \theta_{Z_{\Delta}}} = \frac{U_f}{Z_{\Delta}} \angle -120^\circ - \theta_{Z_{\Delta}} = I_f \angle -\theta_{Z_{\Delta}} - 120^\circ \quad (15.6)$$

$$\bar{I}_{ca} = \frac{\bar{U}_{ca}}{\bar{Z}_{\Delta}} = \frac{U_f \angle -240^\circ}{Z_{\Delta} \angle \theta_{Z_{\Delta}}} = \frac{U_f}{Z_{\Delta}} \angle -240^\circ - \theta_{Z_{\Delta}} = I_f \angle -\theta_{Z_{\Delta}} - 240^\circ \quad (15.7)$$

Observando a figura 15.11 e usando a lei de Kirchhoff das correntes, encontram-se as correntes de linha $\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ e $\bar{I}_c$, que são:

$$\bar{I}_a = \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} = \sqrt{3} I_f \angle -\theta_{Z_{\Delta}} - 30^\circ \quad (15.8)$$

$$\bar{I}_b = \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab} = \sqrt{3} I_f \angle -\theta_{Z_{\Delta}} - 150^\circ \quad (15.9)$$

$$\bar{I}_c = \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc} = \sqrt{3} I_f \angle -\theta_{Z_{\Delta}} - 270^\circ \quad (15.10)$$

Pode-se identificar nos dois comentários a seguir as relações mais importantes para um dispositivo conectado em Δ :

1. As correntes de linha ($\bar{I}_{ab}$, $\bar{I}_{bc}$ e $\bar{I}_{ca}$) têm magnitudes $\sqrt{3}$ maiores que as de fase ($\bar{I}_a$, $\bar{I}_b$ e $\bar{I}_c$), ou seja, $I_l = \sqrt{3} I_f$;

2. As correntes de linha estão atrasadas 30° em relação às de fase.

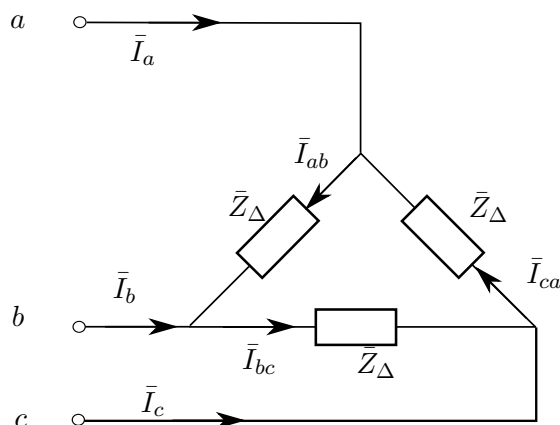


Figura 15.11: Carga trifásica equilibrada com conexões em Δ .

Exemplo 15.3. Calcule o módulo das impedâncias da carga 3Φ equilibrada conectada em triângulo alimentada por uma tensão de 440 V e que consome uma corrente de 15 A.

Solução:

Como o enunciado da questão não diz se os valores de tensão e corrente são de linha ou de fase, então deve-se assumir que eles são valores de linha e isto é o padrão para a análise de dispositivos trifásicos de qualquer tipo.

Ilustrações podem ajudar melhor o entendimento da questão (o estudante deve habituar-se a desenhar os circuitos para melhor entender as relações entre as grandezas), assim tem-se o circuito da figura 15.12, na qual são destacadas as magnitudes das tensões e correntes de linhas, além do módulo da impedância Z_c , que é igual nas três fases já que o enunciado diz que a carga é equilibrada. Saliente-se que em uma carga em Δ a tensão de fase é igual a de linha e, portanto:

$$U_f = U_l = 440 \text{ V}$$

enquanto que a corrente de fase é $\sqrt{3}$ menor que a de linha, ou seja:

$$I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

$$I_f = 8,66 \text{ A}$$

O módulo da impedância pode ser calculado a partir dos valores dos módulos da tensão em seus terminais e da corrente que a atravessa, que neste caso são os módulos da tensão de fase e corrente de fase. O valor de Z_c é:

$$Z_c = \frac{U_f}{I_f}$$

$$Z_c = \frac{440}{8,66}$$

$$Z_c = 50,81 \Omega/\text{fase}$$

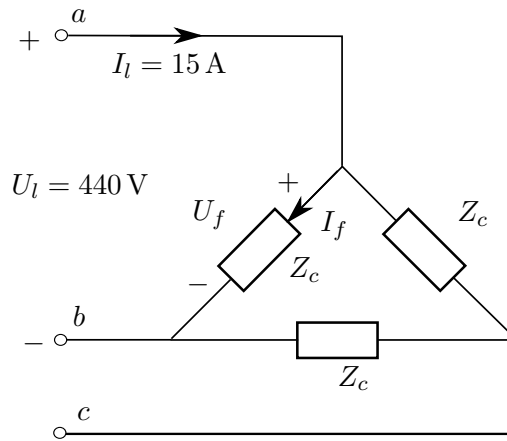


Figura 15.12: Circuito relativo ao exemplo 15.3.

□

Exemplo 15.4. Para uma carga trifásica equilibrada conectada em Δ , cuja impedância tem valor de $4 + j3 \Omega$ /fase e que é alimentada por uma tensão de linha de 380 V, determine:

- Os fasores das correntes de todas as fases;
- Os fasores das correntes de todas as linhas;
- O diagrama fasorial contendo as tensões de linha, as correntes de linha e as correntes de fase.

Solução:

- As tensões de fase e de linha são idênticas em uma carga em Δ e seus valores são:

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ab} &= 380 \angle 0^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_{bc} &= 380 \angle -120^\circ \text{ V} \\ \bar{U}_{ca} &= 380 \angle -240^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Portanto, as correntes de fase são:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{ab} &= \frac{\bar{U}_{ab}}{\mathbf{Z}_c} = \frac{380 \angle 0^\circ}{4 + j3} = 76 \angle -36,87^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{bc} &= \frac{\bar{U}_{bc}}{\mathbf{Z}_c} = \frac{380 \angle -120^\circ}{4 + j3} = 76 \angle -156,87^\circ \text{ A} \\ \bar{I}_{ca} &= \frac{\bar{U}_{ca}}{\mathbf{Z}_c} = \frac{380 \angle -240^\circ}{4 + j3} = 76 \angle 83,13^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

- As correntes de linha são encontradas através do uso das equações (15.8), (15.9) e (15.10). Substituindo-se os valores, tem-se que:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} = 76 \angle -36,87^\circ - 76 \angle 83,13^\circ \\ \bar{I}_a &= 131,64 \angle -66,87^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_b &= \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab} = 76 \angle -156,87^\circ - 76 \angle -36,87^\circ \\ \bar{I}_b &= 131,64 \angle 173,13^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_c &= \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc} = 76 \angle 83,13^\circ - 76 \angle -156,87^\circ \\ \bar{I}_c &= 131,64 \angle 53,13^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

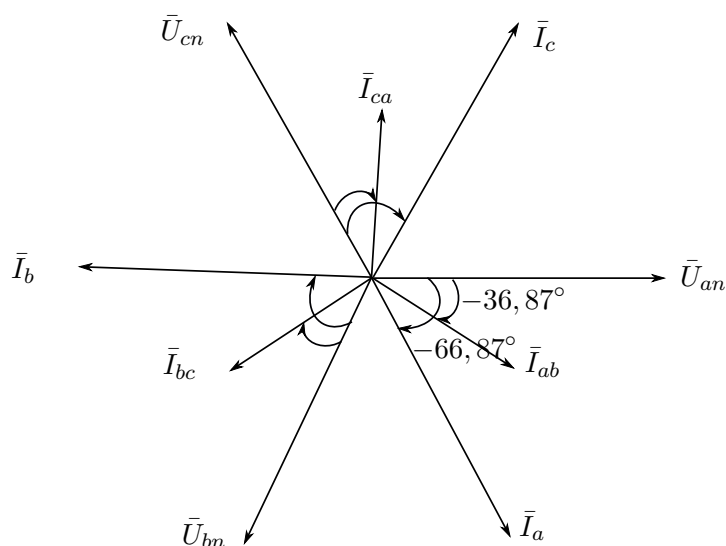


Figura 15.13: Relativo ao exemplo 15.4.

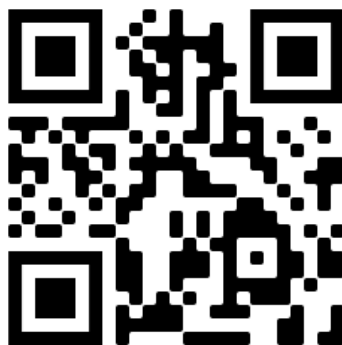
O diagrama fasorial solicitado é mostrado parcialmente na figura 15.13 e você pode completar os ângulos por conta própria. Deve-se observar que as correntes de linha estão defasadas 120° entre si e estão atrasadas 30° em relação às correntes de fase. Uma dúvida comum entre os estudantes é identificar num diagrama como este os ângulos, pois é necessário saber que fasor está na frente em relação a um outro. Pois basta você imaginar que ele gira no sentido anti-horário e fixar sua visualização na referência (ângulo zero), que neste caso é onde está a tensão $\bar{U}_{an}$: qual é a ordem de passagem dos fasores? Veja que será:

$$\bar{U}_{an}, \bar{I}_{ab}, \bar{I}_a, \bar{U}_{bn}, \dots$$

□

Videoaula 15.5 (Análise de cargas conectadas em Δ). Para saber mais sobre cargas conectadas em triângulo acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/yCX4KHbsAQ8>



Videoaula 15.6 (Exemplo: gerador em Y e carga em Δ). Veja um exemplo de um gerador conectado em estrela alimentando uma carga conectadas em triângulo acessando a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/m4-RqyeAJ3g>



15.4 Potências complexa, aparente, ativa e reativa em sistemas trifásicos

Seja em um dispositivo equilibrado conectado em Y ou em Δ as equações de potência são as mesmas. Sabendo que para cada uma das fases as potências são:

$$P_{1\Phi} = U_f I_f \cos(\phi) \quad (15.11)$$

$$Q_{1\Phi} = U_f I_f \sin(\phi) \quad (15.12)$$

$$\mathbf{S}_{1\Phi} = P_{1\Phi} + jQ_{1\Phi} \quad (15.13)$$

$$S_{1\Phi} = \sqrt{P_{1\Phi}^2 + Q_{1\Phi}^2} = U_f I_f \quad (15.14)$$

Então as potências trifásicas são três vezes maiores e são dadas por:

$$P_{3\Phi} = 3U_f I_f \cos(\phi) \quad (15.15)$$

$$Q_{3\Phi} = 3U_f I_f \sin(\phi) \quad (15.16)$$

$$\mathbf{S}_{3\Phi} = P_{3\Phi} + jQ_{3\Phi} \quad (15.17)$$

$$S_{3\Phi} = \sqrt{P_{3\Phi}^2 + Q_{3\Phi}^2} = 3U_f I_f \quad (15.18)$$

Independentemente da conexão do sistema ser em Y ou em Δ as potências podem ser calculadas empregando os valores de tensão e corrente de linha, com as expressões:

$$P_{3\Phi} = \sqrt{3}U_l I_l \cos(\phi) \quad (15.19)$$

$$Q_{3\Phi} = \sqrt{3}U_l I_l \sin(\phi) \quad (15.20)$$

$$\mathbf{S}_{3\Phi} = P_{3\Phi} + jQ_{3\Phi} \quad (15.21)$$

$$S_{3\Phi} = \sqrt{P_{3\Phi}^2 + Q_{3\Phi}^2} = \sqrt{3}U_l I_l \quad (15.22)$$

Saliente-se que em cargas trifásicas equilibradas o valor de $\cos(\phi)$ é o valor do fator de potência e tem a mesma definição do caso monofásico, pois é a razão entre as potências ativa e aparente do dispositivo dado por:

$$FP = \frac{P_{3\Phi}}{S_{3\Phi}} \quad (15.23)$$

O valor de ϕ representa o ângulo de atraso da corrente de uma fase em relação à tensão de sua respectiva fase e também representa o ângulo entre as potências ativa e aparente no triângulo de potências. Estas definições sobre o ângulo ϕ ficarão mais evidentes no decorrer deste capítulo, principalmente se o estudante compreender os próximos exemplos.

Exemplo 15.5. Calcule o valor das impedâncias de uma carga 3Φ equilibrada conectada em Δ , que consome uma potência de 20 kW com um fator de potência de 0,8 indutivo, sabendo que ela é alimentada por tensões equilibradas de módulo 380 V.

Solução:

A ilustração do problema com um circuito mostrado na figura 15.14 auxiliará no entendimento da solução.

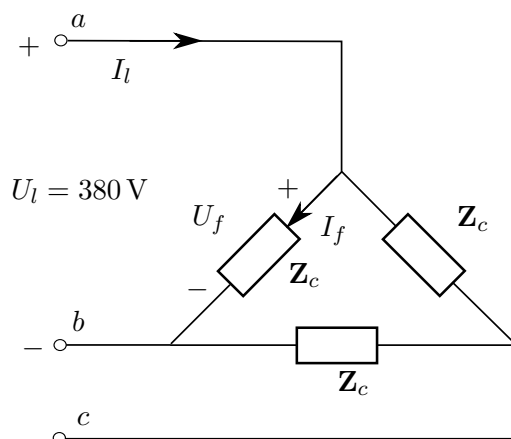


Figura 15.14: Circuito relativo ao exemplo 15.5.

São indicados apenas os módulos: de uma tensão de linha e de fase (que na conexão em Δ tem mesmo módulo) e; de uma corrente de linha e de uma corrente de fase. É necessário salientar que como a carga e a alimentação são equilibradas, então os demais valores nas outras fases e linhas estarão defasados em 120° , mas terão o mesmo módulo. Ficará evidente no decorrer da solução que apenas estas indicações são suficientes para solucionar a questão.

Sempre que houver referência a uma carga trifásica serão informadas a potência trifásica e tensão de linha, desta maneira, tem-se que $U_l = 380$ V e $P_{3\Phi} = 20$ kW. Nas conexões em Δ o valor da tensão de linha é igual ao de fase, ou seja, $U_f = U_l = 380$ V. O fator de potência só tem sentido em uma carga trifásica quando diz respeito à impedância de cada fase. Portanto, o valor do módulo da corrente de fase pode ser encontrado utilizando a equação (15.15), como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} P_{3\Phi} &= 3U_f I_f \cos(\phi) \\ I_f &= \frac{P_{3\Phi}}{3U_f \cos(\phi)} \\ I_f &= \frac{20\,000}{3 \times 380 \times 0,8} \\ I_f &= 21,93 \text{ A} \end{aligned}$$

O módulo da impedância da carga pode ser encontrado a partir do valor das magnitudes da tensão em seus terminais e da corrente que a atravessa. No caso são os valores das tensão de fase e corrente de fase, como mostrado a seguir:

$$Z_c = \frac{U_f}{I_f} = \frac{380}{21,93} = 17,33 \, \Omega$$

O ângulo de atraso da corrente em relação à tensão é dado exatamente por ϕ , que é calculado por:

$$\phi = \arccos(0,8) = 36,87^\circ$$

A resposta final é:

$$\mathbf{Z}_c = Z_c/\underline{\phi} = 17,33/\underline{36,87^\circ} \Omega/\text{fase}$$

□

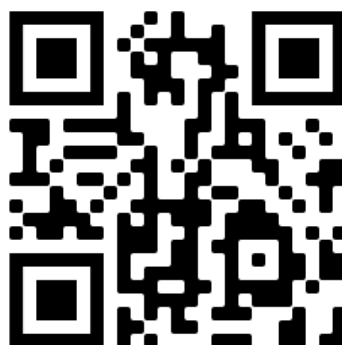
Videoaula 15.7 (Potências em circuitos 3Φ). Para saber quais são e como utilizar as equações de potências complexa, aparente, ativa e reativa em circuitos trifásico acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/QBCuhiLlpJA>



Videoaula 15.8 (Fator de potência em circuitos 3Φ). Para saber como encontrar o fator de potência em circuitos trifásicos acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/zz6bEeGks68>



15.5 Triângulo de potências

Para as potências trifásicas também é válida a representação no triângulo de potências. Para uma carga indutiva tem-se a representação mostrada na figura 15.15(a) e para uma carga capacitiva tem-se a representação mostrada na figura 15.15(b). Não há grandes diferenças na aplicação do triângulo de potências em relação ao caso monofásico, como pode ser notado acompanhando os exemplos a seguir.

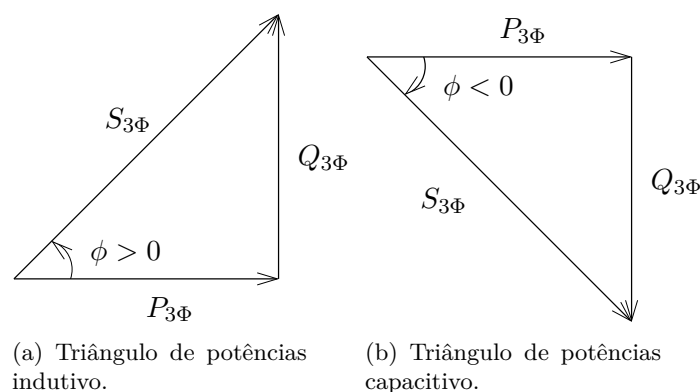


Figura 15.15: Triângulos de potências.

Exemplo 15.6. Uma carga trifásica conectada em Y possui fator de potência 0,85 indutivo, consome 150 kW e é alimentada por uma tensão de 660 V. Calcule:

- Os módulos das correntes de linha e de fase da carga;
- Os valores das potências reativa, aparente e complexa da carga.

Solução:

Mais uma vez foi proposital não ter informado se a tensão dada era de linha ou de fase: é que equipamentos trifásicos são tratados pelos profissionais de engenharia pelos valores de tensão e corrente de linhas e potência trifásica, portanto, deve-se supor que o valor dado é sempre de linha, exceto se dito o contrário.

Esta questão será resolvida sem o uso de circuitos desenhados (faça por conta própria), portanto o estudante deve ter em mente o desenho da configuração de uma carga em Y lembrando que as correntes de linha e de fase são idênticas e que a tensão de linha é $\sqrt{3}$ maior do que a tensão de fase.

- O módulo da corrente de linha pode ser encontrado diretamente da expressão de potência trifásica ativa dada na equação (15.19), como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
 P_{3\Phi} &= \sqrt{3}U_l I_l \cos(\phi) \\
 I_l &= \frac{P_{3\Phi}}{\sqrt{3}U_l \cos(\phi)} \\
 I_l &= \frac{150\,000}{\sqrt{3} \times 660 \times 0,85} \\
 I_l &= 154,37 \text{ A}
 \end{aligned}$$

O módulo da corrente de fase é o mesmo $I_f = I_l = 154,37 \text{ A}$.

- O valor da potência reativa consumida pela carga trifásica é encontrado por:

$$\begin{aligned}
 \text{FP} &= \frac{P_{3\Phi}}{S_{3\Phi}} \\
 S_{3\Phi} &= \frac{P_{3\Phi}}{\text{FP}} \\
 S_{3\Phi} &= \frac{150\,000}{0,85} \\
 S_{3\Phi} &= 176\,470 \text{ VA} \\
 S_{3\Phi} &= 176,47 \text{ kVA}
 \end{aligned}$$

O estudante deve lembrar que o valor do fator de potência é $\cos(\phi)$ e que este pode ser encontrado a partir da análise do triângulo de potências. O valor da potência reativa consumida pela carga trifásica é encontrado por:

$$\begin{aligned} S_{3\Phi}^2 &= P_{3\Phi}^2 + Q_{3\Phi}^2 \\ Q_{3\Phi}^2 &= S_{3\Phi}^2 - P_{3\Phi}^2 \\ Q_{3\Phi} &= \sqrt{S_{3\Phi}^2 - P_{3\Phi}^2} \\ Q_{3\Phi} &= \sqrt{176\,470^2 - 150\,000^2} \\ Q_{3\Phi} &= \sqrt{864\,190} \\ Q_{3\Phi} &= 92.962 \text{ VAr} \\ Q_{3\Phi} &= 92,962 \text{ kVAr} \end{aligned}$$

A potência complexa da carga é:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{3\Phi} &= P_{3\Phi} + jQ_{3\Phi} \\ \mathbf{S}_{3\Phi} &= 150 + j92,962 \text{ kVA} \end{aligned}$$

□

Exemplo 15.7. Uma carga trifásica em Δ capacitiva consome potências de 5 MW e 7 MVA, sendo alimentada por uma tensão de 13,8 kV. Calcule:

- (a) O fator de potência da carga;
- (b) O valor da potência reativa da carga;
- (c) Os módulos das correntes de linha e de fase.

Solução:

- (a) O fator de potência da carga é encontrado via relações trigonométrica no triângulo de potências:

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{P_{3\Phi}}{S_{3\Phi}} \\ \text{FP} &= \frac{P_{3\Phi}}{S_{3\Phi}} \\ \text{FP} &= \frac{5\,000\,000}{7\,000\,000} \\ \text{FP} &= 0,71 \end{aligned}$$

- (b) O valor da potência reativa da carga é encontrada empregando o teorema de Pitágoras no triângulo de potências:

$$\begin{aligned} S_{3\Phi}^2 &= P_{3\Phi}^2 + Q_{3\Phi}^2 \\ Q_{3\Phi} &= \sqrt{S_{3\Phi}^2 - P_{3\Phi}^2} \\ Q_{3\Phi} &= \sqrt{7^2 - 5^2} \\ Q_{3\Phi} &= 4,9 \text{ MVar} \end{aligned}$$

Note que empregando os valores de $S_{3\Phi}$ e $P_{3\Phi}$ com o múltiplo mega, o valor de $Q_{3\Phi}$ também é obtido em mega.

Deve-se salientar que como a carga é capacitiva, então a potência reativa é fornecida à rede elétrica. Portanto, pode-se responder dizendo que a potência reativa fornecida pela carga é 4,9 MVar ou que a potência da carga é $-4,9 \text{ MVar}$. Você pode se precaver sendo mais rigoroso na notação matemática e escrever: $Q_{3\Phi} = \pm \sqrt{S_{3\Phi}^2 - P_{3\Phi}^2}$. Se fizer isto, você só precisa interpretar se a potência reativa será positiva (carga indutiva) ou negativa (carga capacitiva) antes de usar a expressão.

(c) O módulo da corrente de linha pode ser obtido por:

$$P_{3\Phi} = \sqrt{3}U_l I_l \cos(\phi)$$

$$I_l = \frac{P_{3\Phi}}{\sqrt{3}U_l \cos(\phi)}$$

$$I_l = \frac{5\,000\,000}{\sqrt{3} \times 13\,800 \times 0,71}$$

$$I_l = 294,63 \text{ A}$$

O módulo da corrente de fase em um dispositivo em Δ é $\sqrt{3}$ menor do que o módulo da corrente de linha, assim:

$$I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}$$

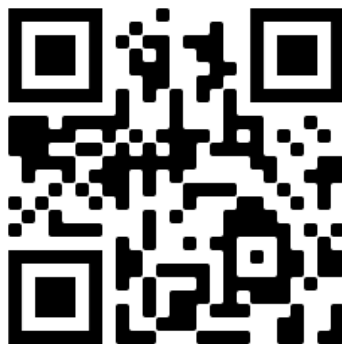
$$I_f = \frac{294,63}{\sqrt{3}}$$

$$I_f = 170,10 \text{ A}$$

□

Videoaula 15.9 (Triângulo de potências - circuitos 3Φ). Para saber a relação entre o triângulo de potência e os valores das potências complexa, aparente, reativa e ativa em circuitos trifásicos acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/melQaGSrDfo>



15.6 Transformações $Y \rightarrow \Delta$ e $\Delta \rightarrow Y$

Eventualmente pode-se querer transformar um dispositivo trifásico conectado em Y em um conectado em Δ e vice-versa, mas estas transformações não são físicas: os equipamentos continuam

conectados do mesmo jeito, mas o modelo de representação pode ser alterado. A ideia é encontrar um modelo equivalente que visto dos terminais de conexão consuma os mesmos valores de potência quando submetidos às mesmas tensões de alimentação.

Para transformar uma carga trifásica em Y em outra equivalente em Δ basta multiplicar o valor da impedância por 3. Para transformar uma carga trifásica em Δ em outra equivalente em Y basta dividir o valor da impedância por 3. O processo é simples assim como dito e é resumido a seguir:

$$\begin{aligned} Y \rightarrow \Delta \text{ utiliza-se } Z_{\Delta} &= 3 \times Z_Y \\ \Delta \rightarrow Y \text{ utiliza-se } Z_Y &= \frac{Z_{\Delta}}{3} \end{aligned} \quad (15.24)$$

A transformação das conexões não é abordada em mais detalhes no presente livro, mas se o estudante acompanhar também as videoaulas verá a dedução das equações de transformação 15.24 na videoaula 15.10 e também sua aplicação na correção do fator de potência na videoaula 17.2, esta última na página 334. Outra forma de identificar a transformação é analisar a figura 15.16.

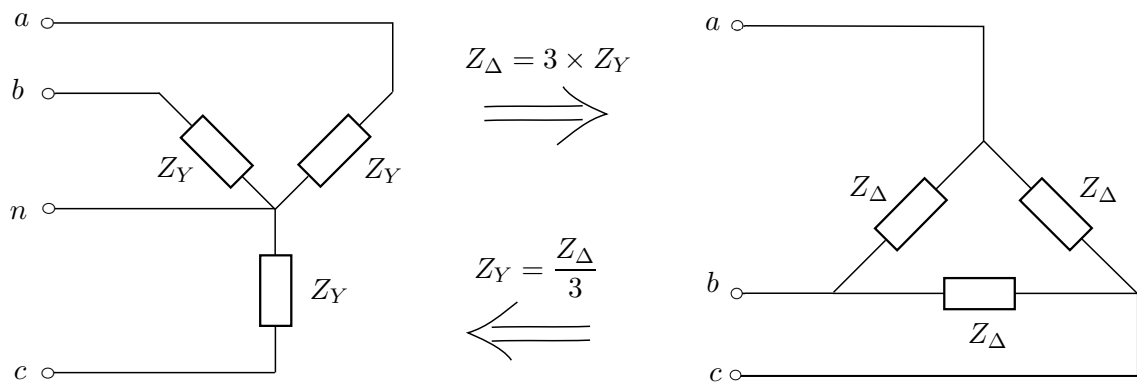
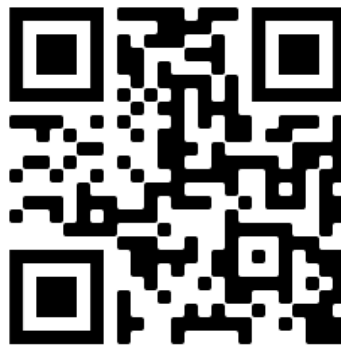


Figura 15.16: Transformação $Y \rightleftharpoons \Delta$.

Videoaula 15.10 (Transformação $Y \rightleftharpoons \Delta$). Para saber mais sobre como realizar a transformação de cargas em estrela para o modelo triângulo e vice-versa acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/FoD6pNhTsYs>



15.7 Resumo do capítulo

Os geradores elétricos que transformam energia mecânica (via turbinas hidráulicas ou eólicas, motor a combustão, entre outras fontes) em energia elétrica são em sua maioria geradores síncronos trifásicos. A transmissão e distribuição de energia elétrica também é feita através de dispositivos trifásicos. Cargas industriais são em boa parte trifásicas, em especial os motores elétricos. Para entendimento de como opera todo o sistema elétrico trifásico o estudante foi apresentado a novos dispositivos e novas formas de conexão. O resumo apresentado a seguir destaca brevemente alguns aspectos que merecem atenção:

- Em um sistema elétrico ideal todos os dispositivos (geradores, transformadores, linhas de transmissão, motores e demais cargas, entre outros) são equilibrados, ou seja, possuem suas tensões de fase e de linha de mesma magnitude e defasadas 120° umas das outras, assim como as suas correntes de fase e de linha;
- São duas as formas mais comuns de conexões trifásicas: em estrela, também conhecida como Y , e em triângulo, também chamada de delta e representada pela letra grega Δ ;
- Na conexão em estrela a tensão de linha é raiz de três vezes maior que a de fase, enquanto que a corrente de linha é igual à de fase;
- Na conexão em triângulo a tensão de linha é igual a de fase, enquanto que a corrente de linha é raiz de três vezes maior que a de fase;
- O gerador síncrono possui o estator com enrolamento trifásico conectado em estrela ou em triângulo e o rotor com enrolamento de excitação, ou seja, com fluxo magnético para indução de tensão no circuito do estator;
- Uma carga equilibrada possui impedâncias de mesmo valor em cada uma das fases;
- A corrente que circula pelo neutro em um dispositivo conectado em estrela é nula quando o sistema é perfeitamente equilibrado;
- A potência trifásica é igual a soma das potências de cada uma das três fases do dispositivo em análise;
- Em uma carga equilibrada (com impedâncias de mesmo valor em cada fase) o fator de potência encontrado em qualquer uma das fases é o fator de potência da carga trifásica;
- É possível realizar a transformação de uma carga em estrela para uma em triângulo e vice-versa; basta utilizar as equações a seguir: $Z_\Delta = 3 \times Z_Y$ e $Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$. Saliente-se que a transformação é para facilitar os cálculos, pois a ligação física se mantém.

Problemas propostos

Problema 15.1. Uma carga trifásica conectada em Δ , que consome uma potência ativa de 10 kW e possui fator de potência 0,8 capacitivo, é alimentada com uma tensão de 220 V. Encontre:

- (a) O módulo da corrente de linha consumida pela carga;
- (b) As potências complexa, aparente e reativa da carga;
- (c) O desenho do triângulo de potência (indicando os valores das potências);
- (d) O valor (em coordenadas retangulares) da impedância da carga;

Problema 15.2. Uma carga trifásica em Y é alimentada com uma tensão de 440 V, consome uma potência ativa de 10 kW e fornece uma potência reativa de 3 kVAr. Calcule a impedância por fase (módulo e ângulo) da carga.

Problema 15.3. Uma carga trifásica conectada em Y consome uma potência reativa de 10 kVAr e possui fator de potência 0,8, quando é alimentada com uma tensão de 220 V. Determine:

- (a) O módulo da corrente de linha consumida pela carga;
- (b) As potências complexa, aparente e ativa da carga;
- (c) O valor (em coordenadas retangulares) da impedância da carga;

Problema 15.4. Uma carga trifásica conectada em Y é alimentada em 220 V, consome uma potência ativa de 10 kW e fornece potência reativa no valor de 3 kVAr. Responda:

- (a) Qual o fator de potência da carga?
- (b) Qual o valor (em coordenadas retangulares) da impedância por fase da carga?
- (c) Desenhe o triângulo de potências da carga.

Problema 15.5. Uma carga trifásica conectada em Δ é alimentada em 600 V e consome uma potência aparente de 15 kVA. Se o fator de potência da carga é de 0,92 indutivo, responda:

- (a) Qual o valor (apenas magnitude) das correntes de linha e de fase da carga?
- (b) Qual a impedância por fase (magnitude e ângulo) da carga?
- (c) Desenhe o triângulo de potências da carga.

Problema 15.6. Um motor elétrico trifásico tem os seguintes dados de placa: Y , 5 hp, $FP = 0,85$, rendimento de 80 %, 380 V. Suponha que o motor opera em condições nominais, então calcule:

- (a) As potências ativa, reativa, aparente e complexa.
- (b) Quais os valores das correntes de linha e de fase (magnitude e ângulo) drenadas pelo motor?
- (c) Nestas condições nominais qual o valor da impedância (magnitude e ângulo) por fase que representa o motor?

Problema 15.7. Um motor de indução com enrolamentos do estator conectados em Δ , é alimentado em 600 V e consome 10 kW com um fator de potência de 0,86 e rendimento de 90%. Calcule:

- (a) Os valores das potências aparente, reativa e complexa;
- (b) Quais os valores das correntes de linha e de fase (magnitude) consumida pelo motor?
- (c) Nestas condições qual o valor da impedância por fase que representa o motor?

Problema 15.8. Para os circuitos da figura 15.17 calcule os valores da magnitude das correntes de linha e de fase, bem como os valores das potências ativa, reativa, aparente e complexa da carga. Desenhe o triângulo de potências correspondente a cada circuito.

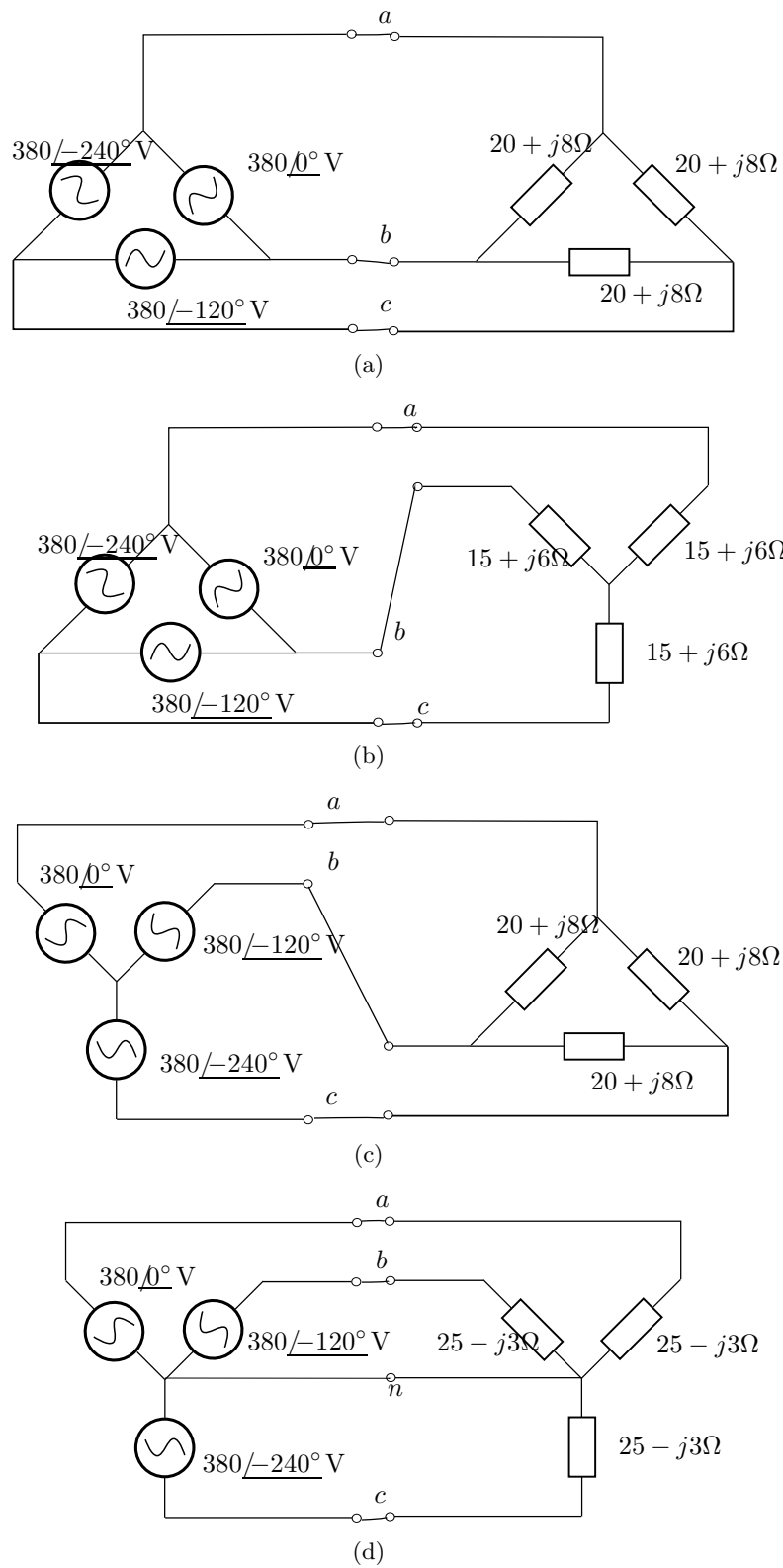


Figura 15.17: Circuitos trifásicos.

Capítulo 16

Cargas trifásicas desequilibradas

16.1 Introdução

Este capítulo trata do caso particular em que uma carga trifásica desequilibrada (que não possui impedâncias idênticas nas fases) é alimentada por tensões equilibradas. Ainda que os dispositivos trifásicos sejam desenvolvidos para operar equilibradamente, o desequilíbrio pode ocorrer acidentalmente. Outra situação encontrada na prática é o mau dimensionamento de cargas monofásicas alimentadas por circuitos elétricos trifásicos; idealmente cada fase deve consumir a mesma potência, porém caso o dimensionamento esteja incorreto, uma fase pode consumir um valor significativamente maior que as demais fases. Mesmo com cálculos bem feitos, não há garantia que os consumidores ligarão seus equipamentos de forma que as cargas da rede de distribuição, por exemplo, estejam equilibradas, portanto, o desequilíbrio de carga vai ocorrer e isto não será um problema, desde que a diferença entre as potências em cada uma das fases esteja dentro de limites aceitáveis.

16.2 Carga trifásica desequilibrada

O desequilíbrio da carga pode ocorrer por vários motivos como, por exemplo: ligação de cargas monofásicas de potências muito distintas em cada fase, acidentes no qual o fio de uma fase é rompido, uso de cargas trifásicas desequilibradas (motores muito velhos e com desgaste maior em condutores de uma fase específica) etc. Em raras aplicações o desequilíbrio é proposital e conveniente. Portanto, comumente o esforço dos profissionais da eletricidade é feito para manter o sistema trifásico equilibrado ou pelo menos o mais próximo possível do equilíbrio.

Os casos de desequilíbrio que são tratados no presente capítulo são:

1. Carga desequilibrada conectada em Y com fio neutro conectado sendo alimentada por tensões de linhas equilibradas. Esta situação é mostrada na figura 16.1(a), nas quais as tensões não estão indicadas, porém as impedâncias em cada fase são diferentes;
2. Carga desequilibrada conectada em Δ sendo alimentada por tensões de linhas equilibradas. Esta situação é mostrada na figura 16.1(b), na qual as tensões não estão indicadas, porém as impedâncias em cada fase são diferentes.

O resultado do desequilíbrio da carga trifásica é que as correntes de fase e de linha não serão mais equilibradas em ambas as situações. Especificamente no caso em que a carga está conectada em Y , existe ainda a corrente no fio neutro e este fato pode ser utilizado para proteger equipamentos, conforme é descrito nos parágrafos a seguir.

A primeira lei de Kirchhoff diz que o somatório das correntes que chegam a um nó é igual ao somatório das correntes que saem deste mesmo nó. Se o fio neutro está presente, então a corrente que circula pelo fio neutro é:

$$\bar{I}_n = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c$$

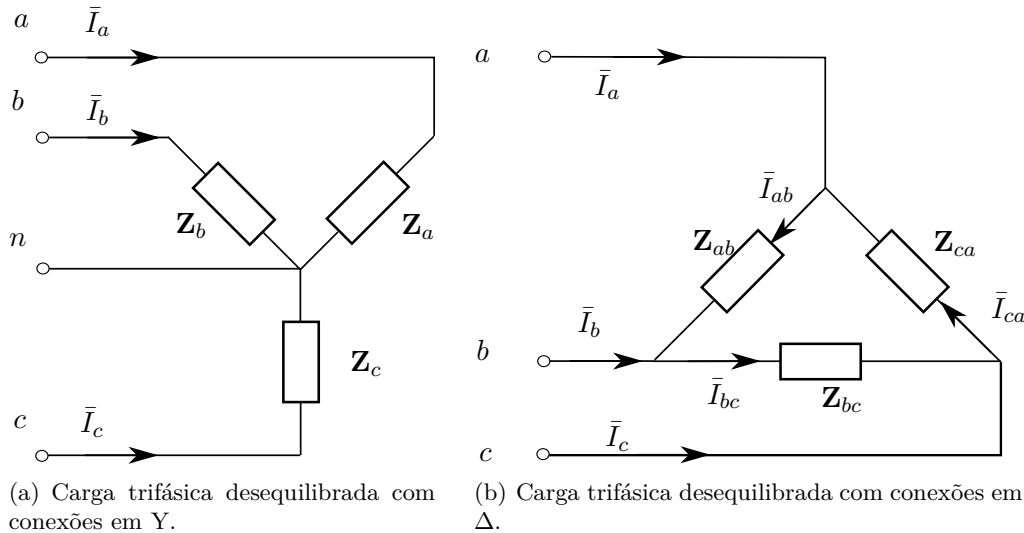


Figura 16.1: Cargas desequilibradas.

Se a carga é equilibrada, então $\bar{I}_n = 0$: isto foi mostrado na discussão feita na página 296. Se há desequilíbrio, então $\bar{I}_n \neq 0$. Um pequeno desequilíbrio é tolerável nas aplicações práticas, porém, se há, por exemplo, o rompimento de um fio das fases de um dispositivo trifásico, deve-se desconectar este dispositivo imediatamente da rede elétrica, pois ele é feito para operar com as três fases idênticas e a falta de uma delas poderá danificá-lo.

Para se identificar a falta de uma das fases ou um desequilíbrio exagerado em uma carga trifásica conectada em Y, coloca-se no fio neutro um dispositivo chamado *relé de sobrecorrente*, que tem como função mudar o seu estado de operação (de chave fechada para aberta ou o bit muda de 0 para 1) no caso da corrente ter atingindo o valor nele configurado; o relé está conectado ao disjuntor, equipamento que tem como função abrir o circuito pelo qual flui a corrente. A explicação em detalhes desta operação é tratada a seguir:

Operação normal Carga opera equilibrada e $\bar{I}_n = 0$. Nenhuma ação precisa ser tomada;

Carga com desequilíbrio aceitável Se por algum motivo a carga está desequilibrada, então $\bar{I}_n = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c \neq 0$. Se o desequilíbrio é pequeno, então $|\bar{I}_n|$ deve ser pequeno. O relé é instalado no fio entre o ponto neutro e a Terra: chama-se este de *condutor de aterramento* ou *condutor de proteção*. O termo proteção é indicado de forma compacta por PE. Como o módulo da corrente que flui da carga para a Terra é um valor pequeno e aceitável, o relé não manda nenhum sinal para o disjuntor abrir o circuito;

Carga com desequilíbrio inaceitável Nesta situação $\bar{I}_n = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c \neq 0$, com $|\bar{I}_n|$ elevado. O relé se sensibilizará com este valor elevado de corrente circulando pelo condutor de aterramento e enviará um sinal para o disjuntor, que abrirá o circuito elétrico que alimenta a carga. Veja o circuito elétrico da figura 16.2 que mostra uma representação dos disjuntores, como chaves, e do relé. Não está representado, porém, o relé é ligado por fios aos disjuntores. É por estes fios que o relé aciona a abertura dos disjuntores.

Os exemplos a seguir ilustram os cálculos em cargas desequilibradas alimentadas por tensões equilibradas.

Exemplo 16.1. Uma carga trifásica conectada em estrela possui tensões de linha equilibradas de módulo 762 V e há conexão entre o neutro da fonte e da carga. A carga possui impedância $6\angle 10^\circ \Omega$ entre os terminais a e n , $5\angle 10^\circ \Omega$ entre os terminais b e n e $7\angle 10^\circ \Omega$ entre os terminais c e n . Calcule:

(a) As correntes de linha e de fase;

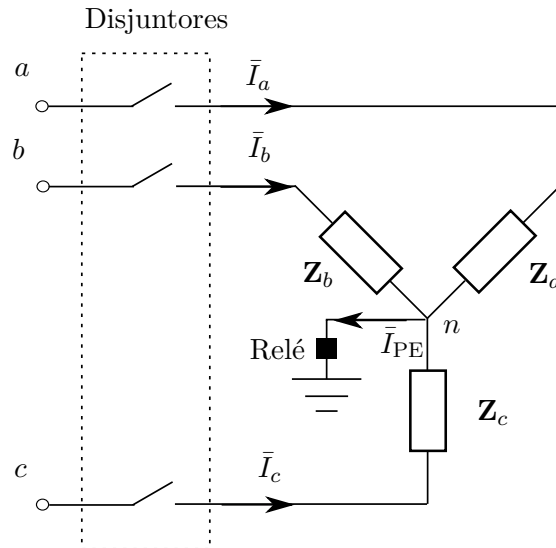


Figura 16.2: Representação de um relé e disjuntores instalados em uma carga conectada em Y.

- (b) A corrente do fio neutro;
- (c) As potências ativa e reativa de cada fase da carga;
- (d) Os fatores de potência de cada fase;
- (e) As potências ativa e reativa da carga trifásica.

Solução: Como o neutro da fonte está conectado ao neutro da carga, então as tensões de fase na carga possuem magnitude raiz de três vezes menores que as de linha ($U_{fase} = 762/\sqrt{3} \approx 440$ V) e pode-se considerar os ângulos com a tensão da fase *a* como referência:

$$\bar{U}_{an} = 440\angle 0^\circ \text{ V}, \bar{U}_{bn} = 440\angle -120^\circ \text{ V e } \bar{U}_{cn} = 440\angle -240^\circ \text{ V},$$

- (a) As correntes de fase e de linha são iguais em uma carga conectada em estrela.

$\bar{I}_a$ é:

$$\begin{aligned} \bar{I}_a &= \frac{\bar{U}_{an}}{\mathbf{Z}_a} \\ \bar{I}_a &= \frac{440\angle 0^\circ}{6\angle 10^\circ} \\ \bar{I}_a &= 73,33\angle -10^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$\bar{I}_b$ é:

$$\begin{aligned} \bar{I}_b &= \frac{\bar{U}_{bn}}{\mathbf{Z}_b} \\ \bar{I}_b &= \frac{440\angle -120^\circ}{5\angle 10^\circ} \\ \bar{I}_b &= 88\angle -130^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$\bar{I}_c$ é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_c &= \frac{\bar{U}_{cn}}{\mathbf{Z}_c} \\ \bar{I}_c &= \frac{440/\underline{-240^\circ}}{7/\underline{10^\circ}} \\ \bar{I}_c &= 62,86/\underline{-250^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

(b) A corrente no fio neutro é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_n &= \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c \\ \bar{I}_n &= 73,33/\underline{-10^\circ} + 88/\underline{-130^\circ} + 62,86/\underline{-250^\circ} \\ \bar{I}_n &= (72,22 - j12,74) + (-56,57 - j67,41) + (-21,5 + j59,07) \\ \bar{I}_n &= -5,85 - j21,08 \text{ A} \\ \bar{I}_n &= 21,88/\underline{-105,5^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

(c) As potências complexas de cada fase são encontradas empregando a expressão $\mathbf{S} = \bar{U}\bar{I}^*$ (lembre-se que o valor utilizado é conjugado) a cada uma das fases da carga. Quando representada na forma retangular $\mathbf{S} = P + jQ$, a potência complexa permite saber os valores das potências ativa P e reativa Q .

A potência complexa da fase a da carga é:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_a &= \bar{U}_{an}\bar{I}_a^* \\ \mathbf{S}_a &= 440/\underline{0^\circ} \times 73,33/\underline{10^\circ} \\ \mathbf{S}_a &= 32\,265/\underline{10^\circ} \text{ VA} \\ \mathbf{S}_a &= 31\,775 + j5\,602 \text{ VA}\end{aligned}$$

Portanto, as potências ativa e reativa são:

$$\begin{aligned}P_a &= 31\,775 \text{ W} \\ Q_a &= 5\,602 \text{ VAR}\end{aligned}$$

A potência complexa da fase b da carga é:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_b &= \bar{U}_{bn}\bar{I}_b^* \\ \mathbf{S}_b &= 440/\underline{-120^\circ} \times 88/\underline{130^\circ} \\ \mathbf{S}_b &= 38\,720/\underline{10^\circ} \text{ VA} \\ \mathbf{S}_b &= 38\,132 + j6\,724 \text{ VA}\end{aligned}$$

Portanto, as potências ativa e reativa são:

$$\begin{aligned}P_b &= 38\,132 \text{ W} \\ Q_b &= 6\,724 \text{ VAR}\end{aligned}$$

A potência complexa da fase c da carga é:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_c &= \bar{U}_{cn}\bar{I}_c^* \\ \mathbf{S}_c &= 440/\underline{-240^\circ} \times 62,86/\underline{250^\circ} \\ \mathbf{S}_c &= 27\,658/\underline{10^\circ} \text{ VA} \\ \mathbf{S}_c &= 27\,238 + j4\,803 \text{ VA}\end{aligned}$$

Portanto, as potências ativa e reativa são:

$$P_c = 27\,238 \text{ W}$$

$$Q_c = 4\,803 \text{ VAR}$$

- (d) Diferentemente de uma carga equilibrada, o fator de potência FP de uma carga desequilibrada deve ser calculado para cada carga individualmente. Entretanto, no presente exemplo, a carga tem módulos diferentes em cada fase e ângulos iguais a 10° em todas elas. Assim, o fator de potência será igual em todas as fases e terá valor igual a: $\text{FP}_a = \text{FP}_b = \text{FP}_c = \cos(10^\circ) = 0,985$. Serão feitos os cálculos por fase utilizando os valores das potências ativa e aparente para mostrar que o resultado é de fato o mesmo.

O fator de potência da fase a (FP_a) é:

$$\text{FP}_a = \frac{P_a}{S_a}$$

$$\text{FP}_a = \frac{31\,775}{32\,265}$$

$$\text{FP}_a = 0,985$$

O fator de potência da fase b (FP_b) é:

$$\text{FP}_b = \frac{P_b}{S_b}$$

$$\text{FP}_b = \frac{38\,132}{38\,720}$$

$$\text{FP}_b = 0,985$$

O fator de potência da fase c (FP_c) é:

$$\text{FP}_c = \frac{P_c}{S_c}$$

$$\text{FP}_c = \frac{27\,238}{27\,658}$$

$$\text{FP}_c = 0,985$$

- (e) As potências ativa e reativa da carga trifásica ($P_{3\Phi}$ e $Q_{3\Phi}$, respectivamente) são obtidas somando as respectivas potências de fases.

A potência ativa trifásica consumida pela carga é:

$$P_{3\Phi} = P_a + P_b + P_c$$

$$P_{3\Phi} = 31\,775 + 38\,132 + 27\,238$$

$$P_{3\Phi} = 97\,145 \text{ W}$$

A potência reativa trifásica consumida pela carga é:

$$Q_{3\Phi} = Q_a + Q_b + Q_c$$

$$Q_{3\Phi} = 5.602 + 6.724 + 4.803$$

$$Q_{3\Phi} = 17\,129 \text{ VAR}$$

□

Exemplo 16.2. Uma carga trifásica conectada em triângulo possui tensões de linha equilibradas de módulo 440 V. A carga possui impedância $5\angle 10^\circ \Omega$ entre os terminais a e b , $5\angle 20^\circ \Omega$ entre os terminais b e c e $5\angle 30^\circ \Omega$ entre os terminais c e a . Calcule as correntes de linha e de fase, tendo em mente que as tensões de linha são:

$$\bar{U}_{ab} = 440\angle 0^\circ \text{ V}, \bar{U}_{bc} = 440\angle -120^\circ \text{ V e } \bar{U}_{ca} = 440\angle -240^\circ \text{ V}$$

Solução:

A corrente de fase $\bar{I}_{ab}$ é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{ab} &= \frac{\bar{U}_{ab}}{\mathbf{Z}_{ab}} \\ \bar{I}_{ab} &= \frac{440\angle 0^\circ}{5\angle 10^\circ} \\ \bar{I}_{ab} &= 88\angle -10^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

A corrente de fase $\bar{I}_{bc}$ é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{bc} &= \frac{\bar{U}_{bc}}{\mathbf{Z}_{bc}} \\ \bar{I}_{bc} &= \frac{440\angle -120^\circ}{5\angle 20^\circ} \\ \bar{I}_{bc} &= 88\angle -100^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

A corrente de fase $\bar{I}_{ca}$ é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{ca} &= \frac{\bar{U}_{ca}}{\mathbf{Z}_{ca}} \\ \bar{I}_{ca} &= \frac{440\angle -240^\circ}{5\angle 30^\circ} \\ \bar{I}_{ca} &= 88\angle -210^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Note que apesar de terem o mesmo módulo as correntes são desequilibradas, já que seus ângulos não estão defasados de 120° um em relação aos outros.

Além de serem pedidas as correntes de fase, foi solicitado também que fossem encontradas as correntes de linha, o que é feito a seguir.

$\bar{I}_a$ é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} \\ \bar{I}_a &= 88\angle -10^\circ - 88\angle -210^\circ \\ \bar{I}_a &= (86,663 - j15,281) - (-76,21 + j44) \\ \bar{I}_a &= 162,873 - j59,281 \text{ A} \\ \bar{I}_a &= 173,33\angle -20^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

$\bar{I}_b$ é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_b &= \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab} \\ \bar{I}_b &= 88\angle -100^\circ - 88\angle -10^\circ \\ \bar{I}_b &= (-15,281 - j86,663) - (86,663 - j15,281) \\ \bar{I}_b &= -101,944 - j71,382 \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 124,45\angle -145^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

$\bar{I}_c$ é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_c &= \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc} \\ \bar{I}_c &= 88 \angle -210^\circ - 88 \angle -100^\circ \\ \bar{I}_c &= (-76,210 + j44) - (-15,281 - j86,663) \\ \bar{I}_c &= -60,929 + 130,663j \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 144,17 \angle 115^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Não foi solicitado, mas o estudante poderia calcular os fatores de potência e notaria que cada fase tem um valor diferente, já que os ângulos das cargas são diferentes entre si. Qual é o fator de potência da carga trifásica? Se o desequilíbrio é pequeno até se faz a média dos três para aproximar por uma carga quase equilibrada, mas se o desequilíbrio for grande é necessário indicar o fator de potência de cada fase separadamente.

□

Exemplo 16.3. Considere que uma carga trifásica conectada em estrela, alimentada com tensão de 660 V de uma fonte cujo neutro está conectado à carga, deve operar equilibrada ou no máximo com um pequeno desequilíbrio. Por isso foi instalado um relé no condutor PE para que este mande um sinal elétrico para o disjuntor abrir o circuito de alimentação sempre que a corrente do condutor PE for maior que 5 A. Verifique se o funcionamento da carga ocorre adequadamente nas três situações a seguir:

- (a) Carga com impedâncias iguais por fase de valor $10 \angle 25^\circ \Omega$;
- (b) Carga com impedâncias de valor por fase $\mathbf{Z}_a = 10 \angle 25^\circ \Omega$, $\mathbf{Z}_b = 10,5 \angle 24^\circ \Omega$ e $\mathbf{Z}_c = 9,5 \angle 26^\circ \Omega$;
- (c) Carga com impedâncias de valor por fase $\mathbf{Z}_a = 9 \angle 25^\circ \Omega$, $\mathbf{Z}_b = 11 \angle 26^\circ \Omega$ e $\mathbf{Z}_c = 9 \angle 22^\circ \Omega$.

Solução:

As tensões de fase são: $\bar{U}_{an} = 380 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\bar{U}_{bn} = 380 \angle -120^\circ \text{ V}$ e $\bar{U}_{cn} = 380 \angle -240^\circ \text{ V}$. Lembre-se que numa carga trifásica o dado de tensão, se não dito nada diferente, é o de linha, portanto: $U_f = U_l / \sqrt{3} = 660 / \sqrt{3} \approx 380 \text{ V}$.

- (a) Em uma carga trifásica equilibrada conectada em Y, a corrente que circula pelo fio neutro é igual a zero e nenhuma conta precisa ser feita para identificar que o relé não acionará o disjuntor.
- (b) Como a carga trifásica está desequilibrada, haverá corrente circulando pelo fio neutro e para encontrar seu valor deve-se calcular as correntes de cada uma das fases, como é feito a seguir.

A corrente da fase a é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= \frac{\bar{U}_{an}}{\mathbf{Z}_a} \\ \bar{I}_a &= \frac{380 \angle 0^\circ}{10 \angle 25^\circ} \\ \bar{I}_a &= 38 \angle -25^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

A corrente da fase b é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_b &= \frac{\bar{U}_{bn}}{\mathbf{Z}_b} \\ \bar{I}_b &= \frac{380 \angle -120^\circ}{10,5 \angle 24^\circ} \\ \bar{I}_b &= 36,19 \angle -144^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

A corrente da fase c é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_c &= \frac{\bar{U}_{cn}}{\mathbf{Z}_c} \\ \bar{I}_c &= \frac{380 \angle -240^\circ}{9,5 \angle 26^\circ} \\ \bar{I}_c &= 40 \angle -266^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

A corrente que circula no condutor de proteção $\bar{I}_{PE}$ tem valor:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{PE} &= \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c \\ \bar{I}_{PE} &= 38 \angle -25^\circ + 36,19 \angle -144^\circ + 40 \angle -266^\circ \\ \bar{I}_{PE} &= (34,44 - j16,06) + (-29,28 - j21,27) + (-2,79 + j39,9) \\ \bar{I}_{PE} &= 2,37 + j2,57 \text{ A} \\ \bar{I}_{PE} &= 3,5 \angle 47,32^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

O módulo da corrente que circula pelo condutor de proteção é $|\bar{I}_{PE}| = 3,5 \text{ A}$, mas para acionar os disjuntores no intuito destes cortarem a alimentação da carga seria necessário que o valor fosse de pelo menos 5 A. Portanto, a carga continuará sendo alimentada, pois o relé não enviará nenhum sinal para que os disjuntores abram o circuito de alimentação.

(c) Deve-se encontrar o valor de $|\bar{I}_{PE}|$ da mesma maneira como feito no item anterior.

A corrente da fase a é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= \frac{\bar{U}_{an}}{\mathbf{Z}_a} \\ \bar{I}_a &= \frac{380 \angle 0^\circ}{9 \angle 25^\circ} \\ \bar{I}_a &= 42,22 \angle -25^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

A corrente da fase b é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_b &= \frac{\bar{U}_{bn}}{\mathbf{Z}_b} \\ \bar{I}_b &= \frac{380 \angle -120^\circ}{11 \angle 26^\circ} \\ \bar{I}_b &= 34,55 \angle -146^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

A corrente da fase c é:

$$\begin{aligned}\bar{I}_c &= \frac{\bar{U}_{cn}}{\mathbf{Z}_c} \\ \bar{I}_c &= \frac{380 \angle -240^\circ}{9 \angle 22^\circ} \\ \bar{I}_c &= 42,22 \angle -262^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

A corrente que circula no condutor de proteção $\bar{I}_{PE}$ tem valor:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{PE} &= \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c \\ \bar{I}_{PE} &= 42,22 \angle -25^\circ + 34,55 \angle -146^\circ + 42,22 \angle -262^\circ \\ \bar{I}_{PE} &= (38,26 - j17,84) + (-28,64 - j19,32) + (-5,88 + j41,81) \\ \bar{I}_{PE} &= 3,75 + j4,65 \text{ A} \\ \bar{I}_{PE} &= 5,97 \angle 51,13^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

Neste caso, $|\bar{I}_{PE}| = 5,97$ e a alimentação da carga é interrompida pela abertura dos disjuntores, já que este receberá um sinal do relé indicando que ele deve abrir para cortar o fornecimento de tensão.

□

Videoaula 16.1 (Carga 3Φ desequilibrada). Para mais sobre o comportamento da corrente quando uma fonte equilibrada alimenta uma carga desequilibrada acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/yt5bRIXBTBk>



16.3 Resumo do capítulo

Os sistemas de energia trifásicos são projetados para operar equilibradamente, porém isto nem sempre ocorre na prática devido a falhas em uma das fases de algum equipamento trifásico, desequilíbrio devido às cargas monofásicas diferentes conectadas à rede trifásica etc. O desequilíbrio pode ocorrer na alimentação de tensão ou então nas impedâncias das fases, mas deve-se salientar que o presente capítulo tratou apenas do caso em que há uma carga com impedâncias diferentes por fase e é alimentada por tensões equilibradas. Um breve resumo é apresentado a seguir:

- No caso de uma carga desequilibrada conectada em Y e com o fio neutro também ligado à alimentação equilibrada, identifica-se corrente circulando pelo fio neutro e isto é utilizado para implementar proteção contra falhas em uma das fases;
- Na carga em triângulo se as correntes de fase ficam desequilibradas devido aos diferentes valores de impedâncias por fase, então as correntes de linha também ficam desequilibradas;
- Na conexão em triângulo não é possível realizar a medição de uma única grandeza para identificar o desequilíbrio, como é possível da conexão em estrela se a corrente de neutro é medida. Portanto, nas cargas em Δ deve-se medir as correntes das três fases.

Problemas propostos

Problema 16.1. Uma carga é conectada em Δ , alimentada por uma tensão de 380 V e com impedâncias $\mathbf{Z}_{ab} = 5\Omega$, $\mathbf{Z}_{bc} = 3\angle 45^\circ\Omega$ e $\mathbf{Z}_{ca} = 8\angle -30^\circ\Omega$. Considerando a tensão $\bar{U}_{ab}$ como referência, determine:

- (a) Os fasores correntes de fase;
- (b) Os fasores correntes de linha;
- (c) A potência complexa de cada uma das fases;
- (d) O fator de potência de cada uma das fases;
- (e) A potência ativa trifásica consumida pela carga;
- (f) A potência reativa trifásica consumida pela carga;
- (g) O diagrama fasorial contendo as correntes de linha e de fase;

Problema 16.2. Uma carga é conectada em Y , alimentada por uma tensão de 380 V e com impedâncias são $\mathbf{Z}_{an} = 5 \Omega$, $\mathbf{Z}_{bn} = 3\angle 45^\circ \Omega$ e $\mathbf{Z}_{cn} = 8\angle -30^\circ \Omega$. Considerando a tensão $\bar{U}_{an}$ como referência, determine:

- (a) Os fasores correntes de fase;
- (b) Os fasores correntes de linha;
- (c) A potência complexa de cada uma das fases;
- (d) O fator de potência de cada uma das fases;
- (e) A potência ativa trifásica consumida pela carga;
- (f) A potência reativa trifásica consumida pela carga;
- (g) O diagrama fasorial contendo as correntes de linha e de fase.

Problema 16.3. Sabe-se que em uma rede elétrica as residências são monofásicas (conectadas entre uma fase e o neutro) e estão distribuídas em três grupos: um conectado à fase A , um conectado à fase B e outro conectado à fase C . Em determinado momento do dia os eletrodomésticos das casas conectadas à fase A são representados pela impedância $10 + j8 \Omega$, os conectados à fase B pela impedância $5 + j12 \Omega$ e os conectados à fase C pela impedância $8 + j7 \Omega$. Sabendo que a rede elétrica é equilibrada e que tensão monofásica é de 127 V, determine os fasores correntes de cada uma das fases e de neutro.

Capítulo 17

Aplicações da teoria de circuitos trifásicos

17.1 Introdução

Enquanto os circuitos monofásicos são utilizados em instalações residenciais, comerciais, prediais e industriais de menor porte, os circuitos trifásicos são muito empregados para alimentar consumidores que necessitam de grande potência ou grandes equipamentos elétricos: mesmo algumas residências e estabelecimentos comerciais já recebem alimentação trifásica se consumirem grande potência. Na indústria os motores de indução trifásicos são muito utilizados e isto exige alimentação trifásica. Outra característica que faz com que os circuitos trifásicos sejam muito utilizados é o fato da transmissão e da distribuição de energia terem menor custo se feitas em um circuito trifásico em vez de um monofásico, pois se este último caso fosse utilizado o condutor teria área de seção transversal muito grande e utilizaria muito material condutor, seja cobre ou alumínio. Qualquer profissional que lide com sistemas de energia deve ter os conceitos tratados no decorrer do presente capítulo em mente.

17.2 Eficiência e motores de indução trifásicos

Na seção 14.2 discutiu-se sobre alguns aspectos do motor de indução monofásico e foi visto que o mesmo tem o circuito do estator alimentado com tensão CA e a corrente circulante neste enrolamento cria um campo magnético. Assim, existe indução de tensão no enrolamento do rotor e como consequência circulação de corrente, pois o circuito do rotor é curto circuitado e sua corrente cria o campo magnético do rotor e a interação entre os campos magnéticos do estator e do rotor criará o torque que fará o rotor girar.

Assim como no motor de indução monofásico, a carga mecânica é acoplada ao eixo do rotor do *motor de indução trifásico* (MIT). A diferença construtiva mais evidente do MIT está no fato do enrolamento do estator possuir três bobinas de fase conectadas em Y ou em Δ : uma ilustração do MIT é mostrada na figura 17.1(a) e uma foto de um motor real é mostrada na figura 17.1(b). O estudante mais atencioso notou na figura 17.1(a) que o estator do MIT é idêntico ao do gerador síncrono e o rotor é idêntico ao do motor de indução monofásico. Da foto mostrada na figura 17.1(b) nota-se que os três enrolamentos não estão conectados, sendo o cliente o responsável por escolher a conexão em Y ou em Δ : isto mesmo, os motores trifásicos podem ser conectados de acordo com a necessidade do cliente pelo fato de poder funcionar com duas tensões distintas.

Outra característica notável na versão trifásica do motor de indução é que ele começa a girar sem a necessidade de nenhum enrolamento auxiliar com capacitor, como é o caso da sua versão monofásica: partir sem auxílio é certamente uma vantagem da versão 3Φ . No MIT o campo magnético criado pelo estator é girante a qualquer instante quando é alimentado por tensões equilibradas, seja na partida ou na operação em regime permanente.

O MIT possui fator de potência indutivo, pois é construído com dois enrolamentos: bobinas no estator e gaiola de esquilo no rotor. Como ele é o dispositivo que consome a maior parcela da energia elétrica nas indústrias, é necessário ter motores eficientes para ter a menor conta mensal de energia

possível e com elevado fator de potência para evitar pagamentos por consumo de excedente de potência reativa. Os exemplos 17.1 e 17.2 mostram como calcular grandezas elétricas relacionadas ao MIT, mas no presente livro ele é tratado como um dispositivo que não está sendo estudado em detalhes; para o propósito deste curso há entrada de potência elétrica (via enrolamento de estator trifásico) e saída de potência mecânica (via eixo que aciona a carga), então os conteúdos dos capítulos anteriores são suficientes para tratar deste dispositivo.

Assim como em qualquer motor elétrico, o MIT possui perdas ôhmicas devido ao efeito joule, perdas magnéticas nos núcleos devido ao valor variável do fluxo magnético e perdas mecânicas devido ao atrito nos mancais de rolamento que dão sustentação ao rotor e devido à ventilação (os motores geralmente possuem ventiladores acoplados ao seu eixo para que possam se arrefecer durante a operação).

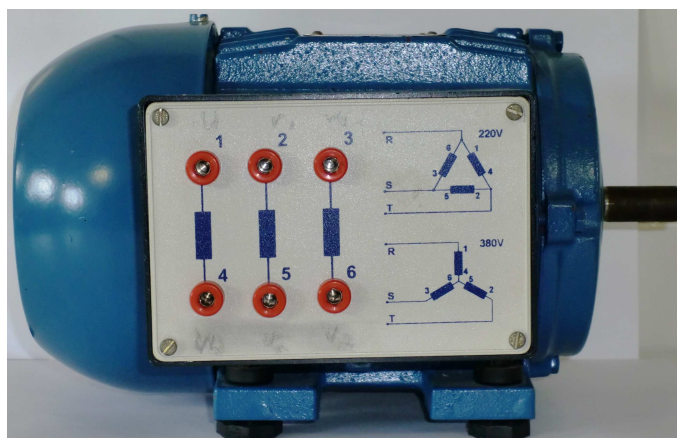
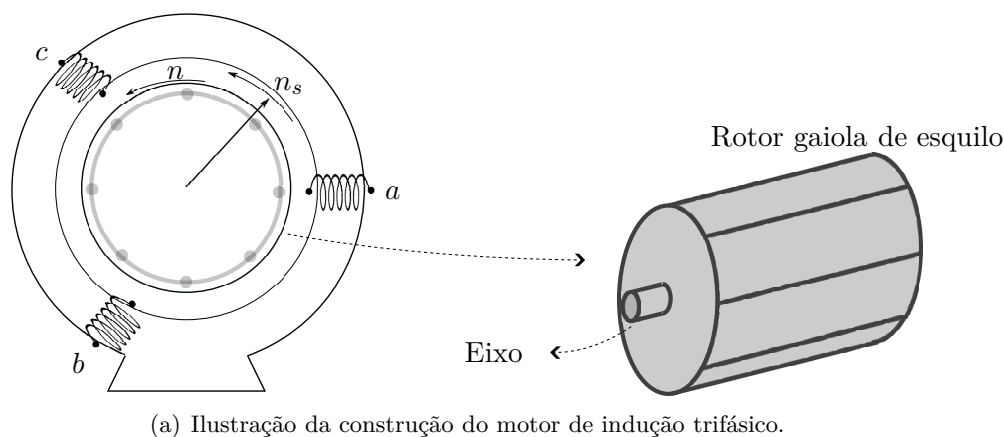


Figura 17.1: Motor de indução trifásico.

Exemplo 17.1. Um motor de indução trifásico com conexões de enrolamento do estator em Y é alimentado em 440 V, a potência mecânica útil para acionamento da carga (potência disponível no eixo para a carga) é de 30 hp, o fator de potência é 0,8 e o rendimento de 75%, calcule:

- O módulo da corrente de linha deste motor;
- A potência perdida neste motor na unidade watt.

Solução:

- A corrente de linha é a mesma de fase nas conexões em Y . Para encontrar o módulo de I_l ,

encontra-se antes a potência de entrada. A potência de saída em watt é:

$$P_s = 30 \text{ hp} = 30 \text{ hp} \times \frac{745,7 \text{ W}}{1 \text{ hp}} = 22\,371 \text{ W}$$

Da eficiência (75% ou 0,75) encontra-se a potência de entrada:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e}$$

$$P_e = \frac{P_s}{\eta}$$

$$P_e = \frac{22\,371}{0,75}$$

$$P_e = 29\,828 \text{ W}$$

Usando a expressão da potência ativa encontra-se o módulo da corrente de linha, como mostrado a seguir:

$$P_e = \sqrt{3}U_l I_l \cos(\phi)(\phi)$$

$$I_l = \frac{P_e}{\sqrt{3}U_l \cos(\phi)}$$

$$I_l = \frac{29\,828}{\sqrt{3} \times 440 \times 0,8}$$

$$I_l = 48,92 \text{ A}$$

- (b) A potência perdida (P_p) neste motor é a diferença entre a potência consumida pelo motor (potência elétrica trifásica de entrada) e a potência útil no eixo. P_p é:

$$P_p = P_e - P_s$$

$$P_p = 29\,828 - 22\,371$$

$$P_p = 7\,457 \text{ W}$$

□

Exemplo 17.2. Um motor de indução trifásico com conexões de enrolamento de estator em Δ é alimentado em 480 V, a potência mecânica útil é de 40 hp, o fator de potência é 0,84 e o rendimento de 85%, calcule:

- (a) O módulo da corrente de linha deste motor;
 (b) A potência perdida neste motor.

Solução:

- (a) O módulo da corrente de linha pode ser encontrado de maneira similar ao calculado no exemplo 17.1. A potência de saída em watt é:

$$P_s = 40 \text{ hp} = 40 \text{ hp} \times \frac{745,5 \text{ W}}{1 \text{ hp}} = 29\,820 \text{ W}$$

Da eficiência (85% ou 0,85) encontra-se a potência de entrada:

$$\eta = \frac{P_s}{P_e}$$

$$P_e = \frac{P_s}{\eta}$$

$$P_e = \frac{29\,828}{0,85}$$

$$P_e = 35\,092 \text{ W}$$

Usando a expressão da potência ativa encontra-se o módulo da corrente de linha, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}P_e &= \sqrt{3}U_l I_l \cos(\phi) \\I_l &= \frac{P_e}{\sqrt{3}U_l \cos(\phi)} \\I_l &= \frac{35\,092}{\sqrt{3} \times 480 \times 0,84} \\I_l &= 50,25 \text{ A}\end{aligned}$$

- (b) A potência perdida (P_p) neste motor é a diferença entre a potência consumida pelo motor (potência elétrica trifásica de entrada) e a potência útil no eixo. P_p é:

$$\begin{aligned}P_p &= P_e - P_s \\P_p &= 35\,092 - 29\,828 \\P_p &= 5\,262 \text{ W}\end{aligned}$$

Você notou que estes últimos dois exemplos foram praticamente idênticos, tendo como grande diferença a conexão do motor? Em um era Y e no outro era Δ . Do ponto de vista dos terminais elétricos as equações utilizadas para encontrar os valores de linha ou mesmo a potência ativa ou reativa consumida podem ser calculadas com as mesmas expressões.

□

Videoaula 17.1 (Corrente em motor CA 3Φ). Para ver o desenvolvimento dos cálculos de corrente em um motor CA trifásico acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/GAarcfoxkjQ>



17.3 Correção do fator de potência

Para uma carga trifásica equilibrada os cálculos para seleção dos capacitores são similares ao caso de uma carga monofásica, já que o valor da capacitância deve ser o mesmo em todas as fases. Por isso, é necessário que o estudante compreenda a seção 14.3, que trata da compensação de reativos para cargas monofásicas, para entender como se dá a correção do fator de potência em circuitos trifásicos. A correção do fator de potência pode ser feita empregando *bancos de capacitores* conectados em Y ou em Δ , ainda que o tipo mais comum seja este último, pois a reatância capacitiva é três vezes maior que

o caso em estrela e, como consequência, o capacitor terá capacitância três vezes menor na conexão Δ do que na em Y , para a mesma potência reativa, obviamente: isto pode ser entendido facilmente se o estudante compreendeu o conceito de transformação $Y \Leftrightarrow \Delta$ apresentado na seção 15.6. Para a mesma faixa de tensão o capacitor de menor capacitância é mais barato, por isto tem-se esta preferência pelo banco em Δ .

Se uma carga trifásica é equilibrada e alimentada por tensões trifásicas equilibradas, a potência reativa consumida por cada uma das fases possui o mesmo valor. O valor de capacitância encontrado para uma fase, portanto, é o mesmo que deve ser utilizado para as demais. Os circuitos elétricos das figuras 17.2 e 17.3 auxiliam no entendimento do que foi dito.

No caso da carga e do banco de capacitores serem conectados em Y , como mostrado no circuito elétrico da figura 17.2(a) basta encontrar o valor da capacitância de uma fase. Isto fica mais evidente se a fase an é separada do restante do circuito, como mostrado no circuito elétrico da figura 17.2(b). Note que neste caso a tensão aplicada ao circuito monofásico é a de fase $\bar{U}_{an}$ e não a de linha. No caso da carga e do banco de capacitores serem conectados em Δ (ver circuito elétrico da figura 17.3(a)) o mesmo procedimento é realizado, separando uma fase do restante do circuito, por exemplo, a fase ab , como mostrado no circuito elétrico da figura 17.3(b).

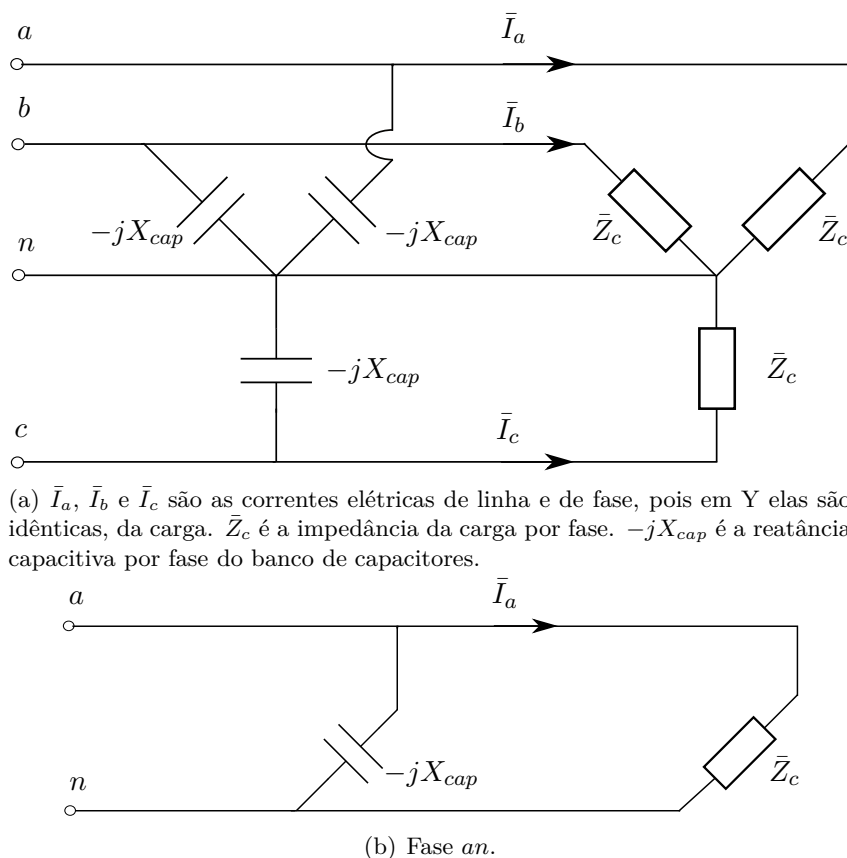


Figura 17.2: Circuito elétrico com carga e banco de capacitores em Y .

Note na figura 17.3(b) que ao se separar uma fase em circuitos em Δ não são representados os valores das correntes elétricas de linha, somente as correntes de fase. Não são fabricados capacitores específicos para cada caso e, portanto, são utilizados bancos trifásicos de capacitores, nos quais vários capacitores são conectados entre si para que o valor da capacitância do banco seja o calculado.

Exemplo 17.3. Calcule o valor da capacitância por fase de um banco em Δ que deve ser posto em paralelo com uma carga trifásica em triângulo (alimentada por uma tensão de 480 V, que consome uma potência de 60 kW e que possui um fator de potência de 0,8 indutivo) para que o fator de potência seja unitário.

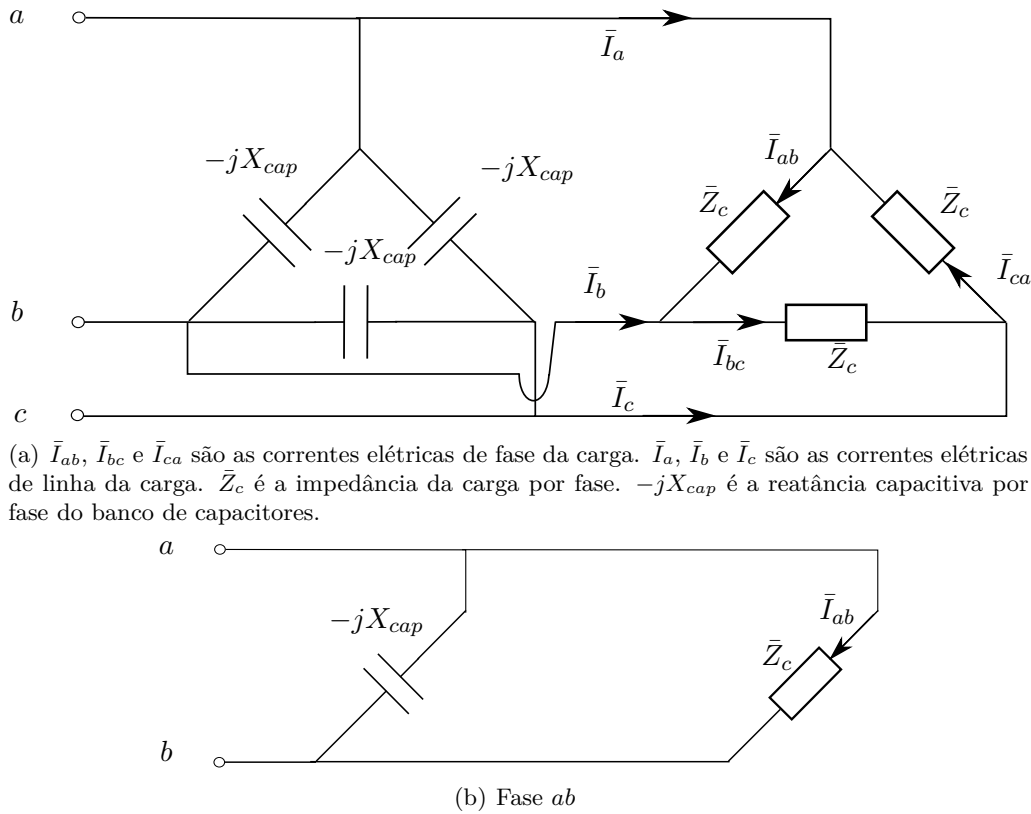


Figura 17.3: Circuito elétrico com carga e banco de capacitores em Δ .

Solução:

Para facilitar os cálculos basta calcular o valor da capacitância de uma fase, portanto, separa-se uma fase da carga. Nesta fase separada a tensão de fase é 480 V (já que este é o valor da tensão de linha, que é o mesmo da de fase, pois a carga está em triângulo), a potência monofásica consumida pela carga é $P_{c1\Phi} = P_{c3\Phi}/3 = 20\,000\text{ W}$ e o fator de potência já é dado por fase e é 0,8.

O ângulo de potência atual da carga é:

$$\phi_A = \arccos(0,8) = 36,87^\circ$$

A potência reativa monofásica atualmente consumida pela carga pode ser calculada com o auxílio de uma ilustração do triângulo das potências (o estudante deve fazer a ilustração). Assim tem-se que:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_A) &= \frac{Q_{c1\Phi(A)}}{P_{c1\Phi(A)}} \\ Q_{c1\Phi(A)} &= P_{c1\Phi(A)} \times \tan(\phi_A) \\ Q_{c1\Phi(A)} &= 20\,000 \times \tan(36,87^\circ) \\ Q_{c1\Phi(A)} &= 20\,000 \times 0,75 \\ Q_{c1\Phi(A)} &= 15\,000\text{ VAr} \\ Q_{c1\Phi(A)} &= 15\text{ kVAr}\end{aligned}$$

Como é desejado que o fator de potência seja unitário, então o valor da potência reativa fornecida pelo capacitor deve ser igual ao consumida pela carga, ou seja:

$$Q_{cap1\Phi} = -Q_{c1\Phi(A)}$$

Como também já é conhecido o valor da tensão nos terminais do capacitor (mesmo valor de fase da carga, já que o capacitor será instalado em paralelo), então a reatância capacitiva pode ser calculada por:

$$\begin{aligned}Q_{cap1\Phi} &= -\frac{U_f^2}{X_{cap}} \\X_{cap} &= -\frac{U_f^2}{Q_{cap1\Phi}} \\X_{cap} &= -\frac{480^2}{(-15\,000)} \\X_{cap} &= 15,36\,\Omega\end{aligned}$$

A capacitância por fase é:

$$\begin{aligned}X_{cap} &= \frac{1}{2\pi f C} \\C &= \frac{1}{2\pi f X_{cap}} \\C &= \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 15,36} \\C &= 0,00017269\text{ F} \\C &\approx 0,17\text{ mF}\end{aligned}$$

Portanto, deve ser instalado em paralelo com a carga um banco trifásico de capacitores em Δ , cujo valor da capacitância por fase é de $C \approx 0,17\text{ mF}$.

□

Exemplo 17.4. Calcule o valor da capacitância por fase do banco capacitivo em Y que deve ser posto em paralelo com uma carga trifásica em estrela (alimentada por uma tensão de 440 V, que consome uma potência de 70 kW e que possui um fator de potência de 0,85 indutivo) para que o fator de potência seja de 0,95.

Solução:

Nesta situação é desejado que seja aumentado o fator de potência ou, equivalentemente, seja diminuído o valor da potência reativa consumida. A diferença entre a potência reativa consumida atualmente pela carga $Q_{c3\Phi(A)}$ e o valor da potência reativa desejada $Q_{c3\Phi(D)}$ deve ser fornecido pelos capacitores. Note que os cálculos a seguir serão feitos com os valores monofásicos de potência. Lembrando que serão utilizados os valores por fase, assim sendo, potência ativa consumida pela carga por fase é:

$$P_{c1\Phi(A)} = P_{c3\Phi(A)}/3 = 70\,000/3 = 23\,333,33\text{ W}$$

A tensão por fase é:

$$U_f = U_l/\sqrt{3} = 440/\sqrt{3} = 254,03\text{ V}$$

Tem-se também que o fator de potência é, por definição, por fase e tem valor de 0,85.

De início calcula-se o valor da potência reativa monofásica consumida pela carga. O ângulo de potência é:

$$\phi_A = \arccos(0,85) = 31,79^\circ$$

Com o auxílio do triângulo das potências (o estudante deve desenhar), encontra-se:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_A) &= \frac{Q_{c1\Phi(A)}}{P_{c1\Phi(A)}} \\ Q_{c1\Phi(A)} &= P_{c1\Phi(A)} \times \tan(\phi_A) \\ Q_{c1\Phi(A)} &= 23\,333,33 \times \tan(31,79^\circ) \\ Q_{c1\Phi(A)} &= 23\,333,33 \times 0,62 \\ Q_{c1\Phi(A)} &= 14\,461 \text{ VAr} \\ Q_{c1\Phi(A)} &\approx 14,46 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

Agora calcula-se o valor da potência reativa $Q_{c1\Phi(D)}$ que se deseja que seja consumida após a instalação do banco capacitivo para que o fator de potência seja o desejado, ou seja, tenha valor 0,95. O valor do ângulo de potência para este fator de potência é:

$$\phi_D = \arccos(0,95) = 18,2^\circ$$

Mais uma vez com o auxílio do triângulo das potências, encontra-se:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_D) &= \frac{Q_{c1\Phi(D)}}{P_{c1\Phi(A)}} \\ Q_{c1\Phi(D)} &= P_{c1\Phi(A)} \tan(\phi_D) \\ Q_{c1\Phi(D)} &= 23\,333,33 \times \tan(18,2^\circ) \\ Q_{c1\Phi(D)} &= 23\,333,33 \times 0,329 \\ Q_{c1\Phi(D)} &= 7\,669,3 \text{ VAr} \\ Q_{c1\Phi(D)} &\approx 7,67 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

A diferença entre os valores de potência reativa atualmente consumida e a desejada deve ser exatamente o valor que o capacitor fornece $Q_{cap1\Phi}$, que é:

$$\begin{aligned}Q_{cap1\Phi} &= Q_{c1\Phi(D)} - Q_{c1\Phi(A)} \\ Q_{cap1\Phi} &= 7\,669,3 - 14\,461 \\ Q_{cap1\Phi} &= -6\,791,4 \text{ VAr}\end{aligned}$$

Assim tem-se que o valor da reatância capacitiva pode ser calculada por:

$$\begin{aligned}Q_{cap1\Phi} &= -\frac{U_f^2}{X_{cap}} \\ X_{cap} &= -\frac{U_f^2}{Q_{cap1\Phi}} \\ X_{cap} &= -\frac{254,03^2}{(-6\,791,4)} \\ X_{cap} &= 9,5 \Omega\end{aligned}$$

A capacitância agora pode ser encontrada, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}X_{cap} &= \frac{1}{2\pi f C} \\ C &= \frac{1}{2\pi f X_{cap}} \\ C &= \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 9,5} \\ C &= 0,00027915 \text{ F} \\ C &\approx 0,28 \text{ mF}\end{aligned}$$

Portanto, deve ser instalado em paralelo com a carga um banco trifásico de capacitores em Y , cujo valor da capacitância por fase é de $C = 0,28 \text{ mF}$.

□

Nos dois casos particulares tratados nos exemplos 17.3 e 17.4 o fato da carga possuir a mesma conexão 3Φ que o banco de capacitores ajuda a compreender melhor a ideia de que a compensação de reativos precisar ser calculada apenas para uma fase, pois os mesmos capacitores devem ser instalados nas demais fases. Entretanto, não é relevante se a carga está em Y ou em Δ já que boa parte das instalações contém vários dispositivos ligados em paralelo tanto em Y quanto em Δ , além dos vários equipamentos monofásicos. O exemplo 17.5 mostra como se corrige o fator de potência de uma instalação considerando que as ligações dos equipamentos trifásicos e monofásicos são desconhecidas. A única consideração que deve ser feita é que a instalação possa ser aproximada por uma carga trifásica equilibrada, ou seja, que independentemente das ligações dos equipamentos das instalações, possa se considerar que os mesmos valores de potências ativa e reativa são consumidas por cada fase.

Exemplo 17.5. Uma instalação industrial trifásica consome uma potência ativa de 100 kW com um fator de potência $0,8$ indutivo. Sabendo que a concessionária de energia elétrica fornece 380 V e supondo que a instalação pode ser aproximada por uma carga 3Φ equilibrada, encontre:

- Os valores da potência reativa e da tensão que o banco 3Φ de capacitores deve possuir para ser conectado em paralelo com a rede para que o fator de potência se eleve para $0,92$ indutivo;
- Os valores da tensão e capacitâncias do banco capacitivo 3Φ em Y para que o fator de potência se eleve para $0,92$ indutivo;
- Os valores da tensão e capacitâncias do banco capacitivo 3Φ em Δ para que o fator de potência se eleve para $0,92$ indutivo.

Solução:

Note que não é relevante como são feitas as conexões dos equipamentos da instalação. Os itens solicitados no enunciado do exemplo serão resolvidos de várias maneiras. O valor da potência reativa a ser compensada é o mesmo independentemente das conexões do banco de capacitores, portanto, usa-se parte dos cálculos feitos para a conexão do banco de capacitores em Y para encontrar o banco em Δ .

- Muitos fabricantes de bancos 3Φ de capacitores fornecem em seus catálogos apenas os valores da potência reativa e da tensão para os quais o seu produto foi fabricado. Como já dito exaustivamente, em qualquer dispositivo 3Φ os valores de tensão são considerados sempre de linha (a não ser que dito explicitamente que são de fase), assim já pode-se dizer que o valor da tensão deve ser o mesmo valor da tensão de linha da rede elétrica que alimenta a instalação, ou seja, a tensão nominal do banco 3Φ de capacitores deve ser 380 V .

A outra pergunta diz respeito ao valor de potência reativa do banco 3Φ de capacitores. Também já foi dito exaustivamente que em dispositivos 3Φ os valores da potência são sempre considerados 3Φ (a não ser que dito explicitamente que é 1Φ). O cálculo da potência reativa do banco é feito a seguir.

O ângulo de potência atual da instalação é:

$$\phi_A = \arccos(0,8) = 36,87^\circ$$

Precisa-se saber o valor da potência reativa consumida atualmente pela instalação, que é obtida

como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_A) &= \frac{Q_{c3\Phi(A)}}{P_{c3\Phi(A)}} \\ Q_{c3\Phi(A)} &= P_{c3\Phi(A)} \times \tan(\phi_A) \\ Q_{c3\Phi(A)} &= 100\,000 \times \tan(36,87^\circ) \\ Q_{c3\Phi(A)} &= 100\,000 \times 0,75 \\ Q_{c3\Phi(A)} &= 75\,000 \text{ VAr} \\ Q_{c3\Phi(A)} &= 75 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

Para que o fator de potência se eleve para 0,92 o ângulo de potência da instalação deve ser:

$$\phi_D = \arccos(0,92) = 23,07^\circ$$

E a potência reativa que deveria ser consumida pela instalação tem valor:

$$\begin{aligned}\tan(\phi_D) &= \frac{Q_{c3\Phi(D)}}{P_{c3\Phi(D)}} \\ Q_{c3\Phi(D)} &= P_{c3\Phi(A)} \tan(\phi_D) \\ Q_{c3\Phi(D)} &= 100\,000 \times \tan(23,07^\circ) \\ Q_{c3\Phi(D)} &= 100\,000 \times 0,43 \\ Q_{c3\Phi(D)} &= 43\,000 \text{ VAr} \\ Q_{c3\Phi(D)} &= 43 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

A diferença entre os valores de potência reativa consumida atual e a desejada deve ser fornecida pelos capacitores, assim temos que:

$$\begin{aligned}Q_{cap3\Phi} &= Q_{c3\Phi(D)} - Q_{c3\Phi(A)} \\ Q_{cap3\Phi} &= 43\,000 - 75\,000 \\ Q_{cap3\Phi} &= -32\,000 \text{ VAr} \\ Q_{cap3\Phi} &= -32 \text{ kVAr}\end{aligned}$$

Relembrando que o sinal negativo indica que a potência é fornecida, então para se corrigir o fator de potência de 0,8 indutivo para 0,92 indutivo, é necessário um banco 3 Φ de capacitores cuja tensão e potência reativa nominais sejam: 380 V e 32 kVAr.

- (b) Se alguns fabricantes fornecem bancos 3 Φ de capacitores especificando os valores de tensão e potência reativa, outros fornecem os valores de tensão (geralmente de linha) e capacitância por fase. Entretanto, neste último caso deve ser informado se o banco é conectado em Y ou em Δ . Para calcular o banco que eleva o fator de potência de 0,8 indutivo para 0,92 indutivo precisa-se encontrar o valor da potência reativa que este banco deve fornecer, porém este cálculo já foi feito no item anterior. O valor da reatância capacitiva X_{cap} do banco é encontrado a seguir:

Sendo:

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

e

$$Q_{cap1\Phi} = \frac{Q_{cap3\Phi}}{3} = \frac{-32\,000}{3} = -10\,667 \text{ VAr}$$

Então:

$$X_{cap} = -\frac{U_f^2}{Q_{cap1\Phi}}$$

$$X_{cap} = -\frac{220^2}{(-10\,667)}$$

$$X_{cap} = 4,54\,\Omega$$

O valor da capacitância é:

$$X_{cap} = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$C = \frac{1}{2\pi fX_{cap}}$$

$$C = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 4,54}$$

$$C = 0,00058427\text{ F}$$

$$C \approx 0,584\text{ mF} \quad (17.1)$$

Portanto, deve-se solicitar um banco 3Φ de capacitores conectado em estrela com tensão de linha de 380 V e de capacitância de 0,58 mF por fase.

- (c) O mesmo procedimento anterior será feito, porém será considerado que o banco 3Φ de capacitores é conectado em Δ . O valor da potência reativa a ser fornecida pelo banco 3Φ de capacitores por fase é de 10 667 VAR (calculado no item anterior). No presente caso a tensão de linha é igual a de fase, portanto:

$$X_{cap} = -\frac{U_f^2}{Q_{cap1\Phi}}$$

$$X_{cap} = -\frac{380^2}{(-10\,667)}$$

$$X_{cap} = 13,54\,\Omega$$

O valor da capacitância é:

$$X_{cap} = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$C = \frac{1}{2\pi fX_{cap}}$$

$$C = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 13,54}$$

$$C = 0,00019591\text{ F}$$

$$C \approx 0,195\text{ mF} \quad (17.2)$$

Portanto, deve-se solicitar um banco 3Φ de capacitores conectado em triângulo com tensão de linha de 380 V e de capacitância de 0,195 mF por fase.

Para finalizar este exemplo é mandatório que o estudante identifique que para corrigir o fator de potência da mesma instalação o banco capacitivo em Y terá capacitâncias três vezes maiores que as do banco em Δ : compare os valores das respostas mostradas nas equações (17.1) e (17.2).

□

Exemplo 17.6. Para a mesma instalação do exemplo 17.5, encontre:

- Os valores da potência reativa e da tensão que o banco 3Φ de capacitores deve possuir para ser conectado em paralelo com a rede para que o fator de potência se torne unitário;
- Os valores da tensão e capacitâncias do banco capacitivo 3Φ em Y para que o fator de potência se torne unitário;
- Os valores da tensão e capacitâncias do banco capacitivo 3Φ em Δ para que o fator de potência se torne unitário.

Solução:

- Agora foi solicitado o dimensionamento de um banco 3Φ de capacitores para que o fator de potência deixe de ser 0,8 (valor atual) para se tornar unitário (valor desejado). O valor atual de potência reativa foram já foi calculado na solução do exemplo 17.5:

$$Q_{c3\Phi(A)} = 75\,000 \text{ VAr}$$

Como deseja-se que a instalação não consuma nem forneça potência reativa, então o banco deve ser dimensionado para compensar exatamente o valor da potência reativa consumida pela instalação, ou seja:

$$Q_{cap3\Phi} = -75\,000 \text{ VAr}$$

Portanto, deve-se usar um banco 3Φ de capacitores de tensão 380 V e de potência reativa de 75 kVAr.

- Para o caso de se desejar conhecer o valor da capacitância por fase do banco capacitivo, deve-se primeiramente calcular a potência reativa por fase a ser entregue pelo banco, cujo valor é:

$$Q_{cap1\Phi} = \frac{Q_{cap3\Phi}}{3} = \frac{-75\,000}{3} = -25\,000 \text{ VAr}$$

A reatância capacitiva vale:

$$\begin{aligned} X_{cap} &= -\frac{U_f^2}{Q_{cap1\Phi}} \\ X_{cap} &= -\frac{220^2}{(-25\,000)} \\ X_{cap} &= 1,94 \, \Omega \end{aligned}$$

O valor da capacitância é:

$$\begin{aligned} X_{cap} &= \frac{1}{2\pi f C} \\ C &= \frac{1}{2\pi f X_{cap}} \\ C &= \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 1,94} \\ C &= 0,0013673 \text{ F} \\ C &\approx 1,37 \text{ mF} \end{aligned}$$

Portanto, deve-se usar um banco 3Φ de capacitores conectado em estrela com tensão de 380 V e de capacitância de 1,37 mF (por fase).

- (c) O mesmo procedimento anterior será feito, porém será considerado que o banco 3Φ de capacitores é conectado em Δ . O valor da potência reativa por fase a ser fornecida pelo banco 3Φ de capacitores é de 25 000 VAR (calculado no item anterior). No presente caso a tensão de linha é igual a de fase, portanto:

$$X_{cap} = -\frac{U_f^2}{Q_{cap1\Phi}}$$

$$X_{cap} = -\frac{380^2}{(-25\,000)}$$

$$X_{cap} = 5,78\,\Omega$$

O valor da capacitância é:

$$X_{cap} = \frac{1}{2\pi fC}$$

$$C = \frac{1}{2\pi fX_{cap}}$$

$$C = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 5,78}$$

$$C = 0,00045892\text{ F}$$

$$C \approx 0,459\text{ mF}$$

Portanto, deve-se usar um banco 3Φ de capacitores conectado em estrela com tensão de 380 V e de capacitância de 0,459 mF por fase.

Mais uma vez é conveniente fazer o estudante notar que os capacitores do banco em Δ conseguem a mesma potência reativa que os do banco em Y com capacitância três vezes menores.

□

Videoaula 17.2 (Correção do fator de potência de cargas 3Φ). Para verificar como a transformação estrela para triângulo pode ser utilizada na solução de problemas envolvendo a correção do fator de potência acesse a videoaula a seguir:

- <https://youtu.be/uZqHds59ha0>



17.4 Potência, energia, eficiência e tarifação

Instalações elétricas que consomem grande potência devem ter fator de potência (FP) maior ou igual a 0,92, não importando se é capacitivo ou indutivo, se não desejarem pagar pelo consumo excedente de potência reativa, porém as normas das concessionárias de energia sugerem que mesmo pequenos consumidores tenham FP próximo da unidade, ainda que não sejam penalizados pelo baixo FP. A discussão de como são feitos os cálculos da tarifação em CA já foi feita na seção 14.4 e a única diferença na abordagem apresentada na presente seção é que a potência envolvida é trifásica, então é conveniente que o estudante retorne à referida seção caso não a tenha em mente e veja posteriormente os exemplos 17.7 e 17.8 que devem ser suficientemente elucidativos.

Exemplo 17.7. Para receber potência elétrica de uma rede 3Φ , uma pequena indústria paga a concessionária de energia uma tarifa de R\$ 0,50/(kW $\times$ h). Sabendo que esta pequena indústria funciona todos os dias do mês, tendo uma potência aparente média de 200 kVA com um fator de potência de 0,92 indutivo de 8 h da manhã até 18 h da tarde, qual é o valor da conta mensal?

Solução:

Como a tarifação é baseada nos kW $\times$ h consumidos, é necessário encontrar a potência ativa $P_{3\Phi}$ que esta indústria consome durante a operação, o que pode ser calculado como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \text{FP} &= \frac{P_{3\Phi}}{S_{3\Phi}} \\ P_{3\Phi} &= \text{FP} \times S_{3\Phi} \\ P_{3\Phi} &= 0,92 \times 200 \text{ kVA} \\ P_{3\Phi} &= 184 \text{ kW} \end{aligned}$$

Como a indústria opera de 8 h da manhã até 18 h da tarde, então o tempo de funcionamento por dia é de 10 h e por mês é $\Delta t = 30 \times 10 = 300$ h. A energia consumida pela indústria por mês é:

$$E = P_{3\Phi} \Delta t = 184 \text{ kW} \times 300 \text{ h} = 55\,200 \text{ kW} \times \text{h}$$

A parcela da conta mensal correspondente somente ao consumo de energia elétrica para realização de trabalho é:

$$C_{R\$} = T_{R\$} E = \left(\frac{\text{R\$ } 0,50}{\text{kW} \times \text{h}} \right) \times (55\,200 \text{ kW} \times \text{h}) = \text{R\$ } 27.600,00$$

Porém, como o fator de potência da instalação está em 0,92, nenhum pagamento adicional por excedente de reativos será cobrado, então o pagamento mensal é de R\$ 27.600,00.

□

Exemplo 17.8. Uma indústria possui 10 motores 3Φ de tensão 13 800 V e 60 Hz, de potência de eixo (de saída) 100 hp, fator de potência 0,8 e rendimento de 85%. Além destes motores 3Φ há outros dispositivos instalados como, por exemplo, lâmpadas, computadores, dispositivos de uso industriais etc. Todos estes outros dispositivos juntos tem uma potência de 150 kVA com um fator de potência de 0,9. Sabendo que a tarifa de energia é R\$ 0,40/kW $\times$ h, calcule a conta mensal de energia devido ao consumo de potência ativa. Considere que todos os dispositivos operam conjuntamente 10 horas por dia, todos os dias do mês.

Solução:

Os cálculos serão feitos com valores de potência com o múltiplo quilo (k) e os subscritos m , mt , d e G serão utilizados para representar variáveis do motor, do total dos dez motores, dos dispositivos e global (a soma dos efeitos dos motores e dos demais dispositivos), respectivamente.

De início faz-se a conversão da potência de saída dos motores de hp para quilowatt, assim tem-se:

$$P_s = 100 \text{ hp} = 100 \text{ hp} \times \frac{745,7 \text{ W}}{1 \text{ hp}} = 74,57 \text{ kW}$$

A potência ativa total consumida pela indústria é a soma das potências ativas dos motores e dos outros dispositivos. A potência dada é a de saída, então potência de entrada P_m de cada motor é:

$$\eta = \frac{P_s}{P_m}$$

$$P_m = \frac{P_s}{\eta}$$

$$P_m = \frac{74,57 \text{ kW}}{0,85}$$

$$P_m = 87,73 \text{ kW}$$

Como são 10 motores idênticos, então a potência ativa total consumida pelos motores P_{tm} é:

$$P_{tm} = 10 \times P_m = 877,3 \text{ kW}$$

É necessário calcular agora a potência ativa consumida pelos demais dispositivos, sabendo que eles consomem juntos 150 kVA com um fator de potência de 0,9, então a potência ativa consumida pelos dispositivos P_d é:

$$\text{FP}_d = \frac{P_d}{S_d}$$

$$P_d = \text{FP}_d \times S_d$$

$$P_d = 0,9 \times 150 \text{ kVA}$$

$$P_d = 135 \text{ kW}$$

A potência ativa total consumida pela indústria (potência ativa de entrada P) é dada pela soma das potências ativas dos motores e dos dispositivos, ou seja:

$$P_G = P_{tm} + P_d = 877,3 \text{ kW} + 135 \text{ kW} = 1012,3 \text{ kW} \quad (17.3)$$

O tempo de operação da indústria é de 10 h por dia e, portanto, de 300 h por mês. A energia mensal consumida pela indústria é:

$$E_G = P_G \Delta t = 1012,3 \text{ kW} \times 300 \text{ h} = 303690 \text{ kW} \times \text{h}$$

A conta mensal devido ao consumo de potência ativa é:

$$C_{R\$} = T_{R\$} E_G = \left(\frac{\text{R\$ } 0,40}{\text{kW} \times \text{h}} \right) \times (303690 \text{ kW} \times \text{h}) = \text{R\$ } 121.480,00/\text{mês}$$

É necessário avaliar o pagamento por excedente de consumo de potência reativa, então calcula-se o fator de potência da instalação. A potência ativa total consumida pela instalação já foi calculada (ver equação (17.3)), então calculando a potência reativa total consumida, pode-se calcular o fator de potência global.

Para os 10 motores, sabe-se que sendo os seus fatores de potência de 0,8, o ângulo de potência é $36,87^\circ$. Usando relação proveniente do triângulo de potências:

$$\tan(\phi_{tm}) = \frac{Q_{tm}}{P_{tm}}$$

$$Q_{tm} = P_{tm} \times \tan(36,87^\circ)$$

$$Q_{tm} = 877,3 \text{ kW} \times 0,75$$

$$Q_{tm} = 658 \text{ kVar}$$

Para as demais dispositivos (lembre-se que os valores de potência estão em quilo):

$$Q_d = \sqrt{S_d^2 - P_d^2}$$

$$Q_d = \sqrt{150^2 - 135^2}$$

$$Q_d = 65,38 \text{ kVAr}$$

A potência reativa consumida por toda a instalação é

$$Q_G = Q_{tm} + Q_d$$

$$Q_G = 658 + 65,38$$

$$Q_G = 723,38 \text{ kVAr}$$

A potência aparente consumida por todos os equipamentos (motores e demais dispositivos) é:

$$S_G = \sqrt{P_G^2 + Q_G^2}$$

$$S_G = \sqrt{1012,3^2 + 723,38^2}$$

$$S_G = 1244,2 \text{ kVA}$$

O fator de potência global da instalação é:

$$FP_G = \frac{P_G}{S_G}$$

$$FP_G = \frac{1012,3}{1244,2}$$

$$FP_G = 0,814$$

O custo pelo consumo excedente de potência reativa é:

$$C_{\text{exc-R\$}} = C_{\text{R\$}} \times \left(\frac{0,92}{FP_G} - 1 \right)$$

$$C_{\text{exc-R\$}} = \text{R\$ } 121.480,00 \times \left(\frac{0,92}{0,814} - 1 \right)$$

$$C_{\text{exc-R\$}} = \text{R\$ } 15.882,00/\text{mês}$$

O custo total mensal é dado pela soma dos custos com o consumo de potência ativa e do consumo do excedente de potência reativa. Realizando esta soma:

$$C_{\text{R\$-total}} = C_{\text{R\$}} + C_{\text{exc-R\$}}$$

$$C_{\text{R\$-total}} = \text{R\$ } 121.480,00 + \text{R\$ } 15.882,00$$

$$C_{\text{R\$-total}} = \text{R\$ } 137.362,00/\text{mês}$$

□

17.5 Resumo do capítulo

Engenheiros de diversas formações que trabalham em grandes empreendimentos comerciais ou em indústrias lidam todos os dias com algumas das aplicações de circuitos trifásico destacadas no presente capítulo e resumidas a seguir:

- Os motores de indução trifásicos com rotor em gaiola de esquilo possuem fator de potência indutivo;

- Os motores de indução trifásicos podem ter seu enrolamento trifásico de estator conectado em Y ou em Δ ;
- A correção do fator de potência de cargas trifásicas indutivas é feita usando bancos trifásicos de capacitores instalados em paralelo à carga. O banco de capacitores pode estar conectado em Y ou em Δ ;
- Os bancos capacitivos em Δ possuem capacitância três vezes menores que as dos bancos em Y, considerando que estão submetidos a mesma tensão e devem fornecer a mesma potência reativa;
- Instalações trifásicas que consomem grande potência pagam por excedente de potência reativa caso o fator de potência esteja abaixo de 0,92 (não importando se é indutivo ou capacitivo).

Problemas propostos

Problema 17.1. Um motor de indução trifásico com bobinas do estator conectadas em Y é alimentado em 380 V. A potência do motor é de 20 hp, seu fator de potência é 0,85 e seu rendimento é de 90%. Para este motor, calcule:

- (a) O módulo da corrente de linha;
- (b) A potência perdida em watt.

Problema 17.2. Há dois motores de indução disponíveis para uma aplicação. Ambos possuem potência de eixo de 21 hp, mas os dados deles não estão completos, pois está faltando a informação de eficiência. Porém são disponíveis os seguintes dados:

- Motor A: 440 V (Δ), 30 A, fator de potência de 0,85;
- Motor B: 380 V (Y), 32 A, fator de potência de 0,86.

Nota: considere que $1 \text{ hp} \approx 745,7 \text{ W}$. Qual desses motores possui maior eficiência?

Problema 17.3. Dimensione o banco de capacitores (tensão de linha e potência reativa trifásica) que deve ser posto em paralelo a uma carga conectada em Y, alimentada em 220 V, que consome 20 kW e possui um fator de potência de 0,82 indutivo, para corrigir o fator de potência desta carga para 0,92 indutivo.

Problema 17.4. Uma instalação industrial trifásica consome potência ativa igual a 50 kW e possui fator de potência 0,85 indutivo. Sabendo que a carga é alimentada em 380 V e supondo que a mesma é equilibrada, determine:

- (a) Os valores de potência reativa e tensão que o banco trifásico de capacitores deve possuir para ser conectado em paralelo com a rede para que o fator de potência seja corrigido para 0,95 indutivo;
- (b) A tensão e a capacitância por fase do banco trifásico de capacitores em Y para que o fator de potência seja corrigido para 0,95 indutivo;
- (c) A tensão e a capacitância por fase do banco trifásico de capacitores conectados em Δ para que o fator de potência seja corrigido para 0,95 indutivo.

Problema 17.5. Será instalado nos terminais de um motor trifásico de potência de eixo de 100 hp, 60 Hz, fator de potência 0,85, rendimento de 90% e tensão de linha de 440 V, um banco de capacitores trifásico para que o fator de potência da associação motor e banco capacitivo seja unitário. Qual deve ser o valor da tensão e da potência reativa trifásica do banco de capacitores?

Problema 17.6. Se no problema anterior é exigido que o banco de capacitores instalado tenha conexão em estrela, qual seria o valor do capacitor por fase a ser utilizado? E para conexão em triângulo, qual o valor dos capacitores de cada fase?

Problema 17.7. Uma pequena indústria possui um motor de 5 hp trifásico, tensão de 220 V, fator de potência 0,85 indutivo e rendimento de 92%. Tal indústria também possui outros equipamentos como: aparelho de ar-condicionado, computador, sistema de iluminação, entre outras. Estes equipamentos juntos consomem 6 kVA com fator de potência de 0,85 indutivo. Sabendo que a tarifa de energia é igual a R\$ 0,35/kW $\times$ h e que a indústria funciona 24 horas por dia e todos os dias do mês, calcule a conta mensal de energia elétrica. Considere o mês com 30 dias.

Problema 17.8. Uma indústria pequena indústria tem sua conta basicamente devido a um motor e a sua conta mensal é de R\$ 2.000,00. Este motor tem potência de saída de 12 cv e opera todos os 30 dias do mês. Sabendo que este motor possui rendimento de 85%, fator de potência de 0,8 e que a tarifa é de R\$ 0,8/kW $\times$ h, então qual é o tempo médio de operação deste motor por dia?

Problema 17.9. Uma pequena indústria é alimentada por uma rede trifásica de 380 V e 60 Hz opera com potência de 100 kW e fator de potência indutivo de 0,7. Ela produz nos horários de 8h-12h e das 14h-18h, todos os dias da semana. A tarifa de energia elétrica é de R\$ 0,70/kW $\times$ h. Se um banco capacitivo trifásico em Δ for instalado em paralelo com capacitância por fase de 250 μF , determine:

- (a) O novo fator de potência da instalação;
- (b) A conta mensal após a instalação do banco capacitivo.

Problema 17.10. Uma empresa consome 500 kVA e, por isso, é alimentada na tensão da rede trifásica de distribuição, que neste local é 13,8 kV. A empresa opera somente nos dias úteis 8h/dia com fator de potência da instalação de 0,7 indutivo e que precisa ser corrigido para 0,92 indutivo. Considerando que o custo da energia é de R\$ 0,50/(kW $\times$ h), qual deve ser o custo do kVAR do banco capacitivo (R\$/kVAR) para que o retorno do investimento ocorra em um ano? **Nota:** considere que um mês tem 22 dias úteis.

Problema 17.11. Uma carga trifásica conectada em delta possui impedância por fase de $1/\underline{40^\circ} \Omega$ quando é alimentada por uma fonte trifásica de 440 V e 50 Hz (**cinquenta!**). Se um banco capacitivo em estrela for utilizado, qual deve ser o valor da capacitância por fase que corrige o fator de potência para unitário?

Problema 17.12. Um motor de indução trifásico opera alimentado por uma rede trifásica de 380 V e 60 Hz, quando drena desta uma corrente de 50 A. O motor aciona na ponta do seu eixo uma carga mecânica de 30 hp. Sabendo que a eficiência deste motor é de 80%, qual é o valor da potência reativa necessária para corrigir o fator de potência para unitário? **Dado:** 1 hp $\approx$ 745,7 W.

Problema 17.13. Uma pequena indústria é alimentada por uma rede trifásica de 11,9 kV e 60 Hz opera com potência de 200 kW e fator de potência indutivo de 0,7. Ela produz nos horários de 8h-12h e das 14h-18h todos os dias da semana. Para este cenário, determine o que é solicitado:

- (a) O valor da potência reativa que deve ser fornecida pelo banco capacitivo para corrigir o fator de potência para 0,92 indutivo;
- (b) O valor da economia anual com a colocação do banco de capacitores, considerando uma tarifa de R\$ 0,50/kWh. Ignore nesse cenário o custo de investimento no banco capacitivo.

Apêndice A

Sugestões de cursos adicionais

A.1 Análise de circuitos em corrente contínua com fontes dependentes

O conteúdo do presente livro se limitou às fontes de tensões não controladas ou independentes, ou seja, fontes de tensão com tensões constantes (mesmo com alteração da corrente que por ela circulasse) e fontes de corrente com corrente constante (mesmo com alteração da tensão em seus terminais).

Para modelar sistemas reais muitas vezes é necessário fazer uso de modelos de fontes controladas, na qual a tensão ou corrente depende da tensão ou corrente de alguma outra parte do circuito. As técnicas de soluções de circuitos quando fontes controladas ou dependentes estão presentes são apresentadas com teoria e exemplos no curso em videoaulas A.1: dê uma conferida, pois as aulas são gratuitas e não precisa de inscrição.

Videoaula A.1 (Técnicas de análise de circuitos CC com fontes dependentes). Para saber detalhes de como utilizar as técnicas de análise de circuitos quando fontes dependentes ou controladas estão presentes acesse o curso em videoaulas a seguir:

- <https://www.youtube.com/playlist?list=PLFai7UQvyStnMSRZ9gQHcBOWOCiawkp2a>



A.2 Análise de circuitos magneticamente acoplados

É muito comum que nos cursos de engenharia elétrica se estude a influência de um dispositivo magnético em outro nas disciplinas de circuitos elétricos. Esta influência se dá quando há correntes que variam no tempo, já que quando correntes constantes estão presentes não há tensões induzidas noutras partes do circuito. Se a análise de circuitos magneticamente acoplados com tensões e correntes

alternadas senoidais te interessa, então confira o curso em videoaulas A.2. As videoaulas são gratuitas para qualquer interessado.

Videoaula A.2 (Análise de circuitos magneticamente acoplados). Para detalhes do uso de técnicas de circuito para análise de circuitos com acoplamento magnético acesse o curso em videoaulas a seguir:

- <https://www.youtube.com/playlist?list=PLFai7UQvyStn48uWJNbrQqZwXaVZLgVNx>



Apêndice B

Respostas dos problemas propostos

Capítulo 1

- Problema 1.1)

- (a) $5,001 \times 10^3$
- (b) 4×10^6
- (c) $3,6 \times 10^{-6}$
- (d) $0,4 \times 10^0 = 0,4$
- (e) $5 \times 10^0 = 5$
- (f) $1 \times 10^0 = 1$
- (g) 3×10^9
- (h) $5,5 \times 10^3$
- (i) $49,75 \times 10^{12}$

- Problema 1.2)

- (a) $0,02 \text{ kA}$
- (b) $23\,000 \mu\text{V}$
- (c) $0,1 \text{ GW}$
- (d) $0,001 \text{ k}\Omega$
- (e) $0,002342 \text{ mF}$

Capítulo 2

Obs.: Os símbolos Ag , Al , Au e Cu representam, respectivamente, a prata, o alumínio, o ouro e o cobre.

- Problema 2.1) $R_{Al} = 0,0881 \Omega$ e $R_{Cu} = 0,0538 \Omega$
- Problema 2.2) $\rho_1 = 0,032 \Omega\text{mm}^2/\text{m}$, $\rho_2 = 0,128 \Omega\text{mm}^2/\text{m}$ e $\rho_3 = 192 \Omega\text{mm}^2/\text{m}$. O material 3 é melhor isolante, pois por ter maior resistividade é o que cria maior dificuldade à circulação de cargas elétricas.
- Problema 2.3) $A = 4,128 \text{ mm}^2$
- Problema 2.4) $R_{40^\circ, Cu} = R_{40^\circ, Al} = 961 \Omega$
- Problema 2.5) $R_{20^\circ} = 0,4537 \Omega$
- Problema 2.6) $T = 35,789^\circ\text{C}$
- Problema 2.7) $R_{40^\circ} = 5,2 \text{ k}\Omega$, $R_{60^\circ} = 5,4 \text{ k}\Omega$ e $R_{80^\circ} = 5,6 \text{ k}\Omega$,

- Problema 2.8) $R_{Ag} = 1,228 \Omega$, $R_{Cu} = 1,234 \Omega$, $R_{Au} = 1,204 \Omega$ e $R_{Al} = 1,234 \Omega$

- Problema 2.9)

- (a) $P = 9,68 \text{ kW}$ e $I = 44 \text{ A}$
- (b) $G = 0,2 \text{ S}$
- (c) $P = 28,88 \text{ kW}$ e $I = 76 \text{ A}$
- (d) Se o resistor é ôhmico, então seu valor não se altera independentemente do valor da tensão aplicada aos seus terminais.

- Problema 2.10)

- (a) – Chuveiro 1 - $I = 20 \text{ A}$ e $P = 4,4 \text{ kW}$
– Chuveiro 2 - $I = 60 \text{ A}$ e $P = 13,2 \text{ kW}$
– Chuveiro 2 - $I = 6,7 \text{ A}$ e $P = 1,475 \text{ kW}$
- (b) Apenas o chuveiro 1 irá operar na potência especificada, pois é o único que será alimentado pela tensão especificada.
- (c) Não. O chuveiro 2 será danificado, pois se for alimentado com uma tensão maior que a especificada pelo fabricante fará com que o resistor aqueça mais do que o valor previsto. Em linguagem popular diz-se que o chuveiro 2 irá “queimar”. O chuveiro 3 irá operar com potência abaixo da prevista, aquecendo a água numa temperatura menor, porém não haverá risco de “queimar”.

- Problema 2.11)

- (a) $I = 66,67 \text{ A}$
- (b) $G = 5,56 \text{ S}$

- Problema 2.12)

- (a) $I = 0,8184 \text{ A}$ e $P = 180,05 \text{ W}$
- (b) Irá queimar. O filamento da lâmpada irá se romper.

Capítulo 3

- Problema 3.1)

- Para a figura (a) - $I = 56,17 \text{ A}$

- Para a figura (b) - $I = 48 \text{ A}$
- Para a figura (c) - $I = 36 \text{ A}$
- Para a figura (d) - $I = 480 \text{ A}$
- Problema 3.2)
 - Para a figura (a) - $R_{eq(ab)} = 0,444 \Omega$ e $R_{eq(ac)} = 1,111 \Omega$
 - Para a figura (b) - $R_{eq(ab)} = 3 \Omega$ e $R_{eq(bc)} = 4 \Omega$
 - Para a figura (c) - $R_{eq(ab)} = 1,111 \Omega$ e $R_{eq(bc)} = 0,778 \Omega$
 - Para a figura (d) - $R_{eq(ab)} = 4 \Omega$ e $R_{eq(ca)} = 2 \Omega$
 - Para a figura (e) - $R_{eq(ab)} = 5,463 \Omega$, $R_{eq(ac)} = 2,463 \Omega$ e $R_{eq(bc)} = 3 \Omega$
- Problema 3.3)
 - Para a figura (a) - $R_{eq(ab)} = 0 \Omega$ e $R_{eq(ac)} = 1 \Omega$
 - Para a figura (b) - $R_{eq(ab)} = 2,667 \Omega$ e $R_{eq(bc)} = 2,667 \Omega$
 - Para a figura (c) - $R_{eq(ab)} = 0,857 \Omega$ e $R_{eq(bc)} = 0 \Omega$
 - Para a figura (d) - $R_{eq(ab)} = 2 \Omega$ e $R_{eq(ca)} = 2 \Omega$
 - Para a figura (e) - $R_{eq(ab)} = 4,463 \Omega$, $R_{eq(ac)} = 1,463 \Omega$ e $R_{eq(bc)} = 3 \Omega$
- Problema 3.4)
 - Para a fig. (a) - $P_{R_{eq(ab)}} = 8064,5 \text{ W}$, $P_{R_{eq(ac)}} = 2115,3 \text{ W}$ e $P_{R_{eq(bc)}} = 2867,4 \text{ W}$
 - Para a fig. (b) - $P_{R_{eq(ab)}} = 1780,5 \text{ W}$, $P_{R_{eq(ac)}} = 1553,5 \text{ W}$ e $P_{R_{eq(bc)}} = 1871,6 \text{ W}$
- Problema 3.5)
 - Para a figura (a) - $U = 80 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 16,67 \Omega$, $P_{R_1} = 90 \text{ W}$ e $P_{R_2} = 150 \text{ W}$
 - Para a figura (b) - $U = 80 \text{ V}$, $P_{10\Omega} = 40 \text{ W}$ e $P_{30\Omega} = 120 \text{ W}$
 - Para a figura (c) - $I_1 = 0,125 \text{ A}$, $I_2 = 0,25 \text{ A}$, $P_{1mS} = 15,625 \text{ W}$ e $P_{2mS} = 31,25 \text{ W}$
- Problema 3.6)
 - Para a figura (a) - L_1 e L_2
 - Para a figura (b) - L_1 , L_2 e L_3
 - Para a figura (c) - L_1 , L_2 e L_3
 - Para a figura (d) - Nenhuma
- Problema 3.7)

- (a) Paralelo: lâmpadas acendem com a luminosidade especificada pelo fabricante. Série: as lâmpadas acendem com luminosidade muito baixa ou talvez nem mesmo acendam (depende do projeto da lâmpada).
- (b) Paralelo: a potência de cada lâmpada é de 60 W . Série: $P = 2,4 \text{ W}$.
- (c) Paralelo: lâmpadas acendem com a luminosidade especificada pelo fabricante. Série: a tensão em cada lâmpada seria o dobro da do caso com 10 unidades e, portanto, a potência seria quatro vezes maior, mas ainda assim a luminosidade seria muito baixa caso as lâmpadas acendessem.

Capítulo 4

- Problema 4.1)
 - Para a figura (a) - $1,0909 \Omega$
 - Para a figura (b) - 6Ω
 - Para a figura (c) - 4Ω
- Problema 4.2)
 - Para a figura (a) - A leitura no amperímetro é 5 A e no voltímetro é 90 V . $R_1 = 54 \Omega$ e $R_2 = 2 \Omega$.
 - Para a figura (b) - A leitura no amperímetro é 1 A e no voltímetro é 210 V . $R_1 = 42 \Omega$ e $R_2 = 5 \Omega$.
 - Para a figura (c) - A leitura no amperímetro é 10 A e no voltímetro é 60 V . $U_1 = 60 \text{ V}$.
- Problema 4.3)
 - Para a figura (a) - $18,75 \text{ W}$
 - Para a figura (b) - 25 W
 - Para a figura (c) - 50 W
 - Para a figura (d) - 100 W

Capítulo 5

- Problema 5.1)
 - (a) $x_1 = -1$ e $x_2 = -1$
 - (b) $A = 1,9286$ e $B = 1,7857$
 - (c) $I = 26$ e $V = 8$
 - (d) $v_1 = 6,3235$ e $v_2 = 8,7353$
 - (e) $x_1 = 0,0274$ e $x_2 = 0,562$
 - (f) $T_1 = 0,583$ e $T_2 = 2,312$
 - (g) $V_1 = 0,843$ e $V_2 = 5,832$
- Problema 5.2)
 - (a) $x_1 = -1,8$, $x_2 = -3$ e $x_3 = 0,4$
 - (b) $A = 0,889$, $B = -8$ e $C = -2,889$
 - (c) $I_1 = 0,889$, $I_2 = -1$ e $I_3 = 0,111$

Capítulo 6

- Problema 6.1)
 - Para a figura (a) - $I_x = 4,5\text{ A}$
 - Para a figura (b) - $I_x = -9,4545\text{ A}$
 - Para a figura (c) - $I_x = -30,333\text{ A}$
 - Para a figura (d) - $I_x = 1\text{ A}$
 - Para a figura (e) - $I_x = 6\text{ A}$
- Problema 6.2) São necessárias 10 placas. Devem ser utilizadas dois conjuntos em série de 5 placas. Depois deve-se associar estes dois conjuntos em paralelo. Note que a potência total que pode ser fornecida pela associação de placas é de 10 kW, mas não há como obter os 60 V com outra configuração.
- Problema 6.3)
 - (a) 12 células em série.
 - (b) 2 conjuntos, de 24 células associadas em série cada um, associadas em paralelo.
 - (c) 8 conjuntos, de 12 células associadas em série cada um, associadas em paralelo.
- Problema 6.4)
 - Para a figura (a) - $I_1 = -3,2727\text{ A}$, $I_2 = -4,303\text{ A}$ e $P_F = P_C = 118,79\text{ W}$
 - Para a figura (b) - $I_1 = 2,7273\text{ A}$, $I_2 = 3,6364\text{ A}$, $I_3 = -0,3636\text{ A}$ e $P_F = P_C = 72,727\text{ W}$
 - Para a figura (c) - $I_1 = 2,25\text{ A}$, $I_2 = 0,5\text{ A}$, $I_3 = 2\text{ A}$ e $P_F = P_C = 21\text{ W}$
- Problema 6.5 - 6,25 W
- Problema 6.6)
 - Para a figura (a) - $R_{th} = 1,231\ \Omega$ e $U_{th} = 3,231\text{ V}$
 - Para a figura (b) - $R_{th} = 1,2\ \Omega$ e $U_{th} = 4,4\text{ V}$
- Problema 6.7)
 - Para a figura (a) - $R_N = 0,7333\ \Omega$ e $I_N = 3,2727\text{ A}$
 - Para a figura (b) - $R_N = 3\ \Omega$ e $I_N = 5,33\text{ A}$
- Problema 6.8)
 - Se $R_c = 2\ \Omega$, então $U_c = 7,2\text{ V}$ e $I_c = 3,6\text{ A}$
 - Se $R_c = 4\ \Omega$, então $U_c = 9\text{ V}$ e $I_c = 2,25\text{ A}$
 - Se $R_c = 6\ \Omega$, então $U_c = 9,82\text{ V}$ e $I_c = 1,64\text{ A}$
- Problema 6.9) Se $R_c = 3\ \Omega$, então $P_c = 48\text{ W}$ e se $R_c = 9\ \Omega$, então $P_c = 16\text{ W}$

Capítulo 7

- Problema 7.1) 82,33%
- Problema 7.2) 91,94 kW $\times$ h
- Problema 7.3)
 - (a) 2,5 kW
 - (b) 45,45 A
 - (c) 7,5 kW
 - (d) R\$ 4.800,00
- Problema 7.4) 0,60 R\$/kW $\times$ h
- Problema 7.5) 9,81 A
- Problema 7.6) 1,14 kW

Capítulo 8

- Problema 8.1)
 - (a) $\sin(45^\circ) = 0,707$ e $\cos(45^\circ) = 0,707$
 - (b) $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -0,866$ e $\cos(-\frac{\pi}{3}) = 0,5$
 - (c) $\sin(-20^\circ) = -0,342$ e $\cos(-20^\circ) = 0,940$
 - (d) $\sin(\frac{\pi}{7}) = 0,434$ e $\cos(\frac{\pi}{7}) = 0,901$
 - (e) $\sin(115^\circ) = 0,906$ e $\cos(115^\circ) = -0,423$
 - (f) $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -0,707$ e $\cos(-\frac{\pi}{4}) = 0,707$
 - (g) $\sin(-330^\circ) = 0,5$ e $\cos(-330^\circ) = 0,866$
 - (h) $\sin(\frac{5\pi}{8}) = 0,924$ e $\cos(\frac{5\pi}{8}) = -0,383$
 - (i) $\sin(-45^\circ) = -0,707$ e $\cos(-45^\circ) = 0,707$
 - (j) $\sin(-0,9) = -0,783$ e $\cos(-0,9) = 0,622$
 - (k) $\sin(150^\circ) = 0,5$ e $\cos(150^\circ) = -0,866$
 - (l) $\sin(2,5) = 0,598$ e $\cos(2,5) = -0,801$
 - (m) $\sin(-315^\circ) = 0,707$ e $\cos(-315^\circ) = 0,707$
 - (n) $\sin(\frac{7\pi}{4}) = -0,707$ e $\cos(\frac{7\pi}{4}) = 0,707$
 - (o) $\sin(120^\circ) = 0,866$ e $\cos(120^\circ) = -0,5$
 - (p) $\sin(-\frac{5\pi}{3}) = 0,866$ e $\cos(-\frac{5\pi}{3}) = 0,5$
 - (q) $\sin(300^\circ) = -0,866$ e $\cos(300^\circ) = 0,5$
 - (r) $\sin(\frac{2\pi}{6}) = 0,866$ e $\cos(\frac{2\pi}{6}) = 0,5$
 - (s) $\sin(210^\circ) = -0,5$ e $\cos(210^\circ) = -0,866$
 - (t) $\sin(\frac{4\pi}{3}) = -0,866$ e $\cos(\frac{4\pi}{3}) = -0,5$
- Problema 8.2)
 - (a) $x = 1,562\text{ m}$ e $\theta = 39,806^\circ$
 - (b) $h = 13,454\text{ m}$, $\alpha = 48,013^\circ$, $\sin(48,01^\circ) = 0,743$, $\cos(48,01^\circ) = 0,669$ e $\tan(48,01^\circ) = 1,111$
- Problema 8.3)
 - (a) $10 + j12,66$
 - (b) $-3,73 + j2$
 - (c) $17,32 + j10$

- (d) $0,049 + j0,56$
- (e) $-0,71 - j0,46$
- (f) $-44 + j188,07$
- (g) $2 - j23$
- (h) $-0,24 + j0,96$
- (i) $-j20$
- (j) $6,73 + j9,66$

- Problema 8.5)
 - Para a figura (a) - $i(t) = 5 \cos(314,16t - 90^\circ)$ A
 - Para a figura (b) - $u(t) = 220 \cos(377t + 90^\circ)$ V

Capítulo 9

- Problema 9.1)
 - (a) A magnitude da tensão induzida é de 30 V.
 - (b) A magnitude da tensão induzida é de 30 V.
 - (c) A polaridade das tensões induzidas nos terminais do indutor são invertidas de um experimento para o outro, pois em um experimento a corrente elétrica teve seu valor aumentado e noutro a corrente elétrica teve seu valor diminuído. A magnitude da tensão induzida foi a mesma, já que a variação absoluta da corrente elétrica foi igual em ambos os experimentos e se deu no mesmo intervalo de tempo.
- Problema 9.2)
 - (a) Há apenas um laço no circuito e, portanto, a corrente elétrica circula pela fonte e pelo capacitor. A corrente elétrica é 0 A.
 - (b) 50 A
 - (c) 50 A (note que esta corrente elétrica circula em sentido contrário ao do item anterior)
- Problema 9.3)
 - Para a figura (a) - $L_{eq} = 15 \mu\text{H}$
 - Para a figura (b) - $L_{eq} = 12,5 \text{ mH}$
 - Para a figura (c) - $L_{eq} = 105 \text{ mH}$
 - Para a figura (d) - $L_{eq} = 39,23 \text{ mH}$
- Problema 9.4)
 - Para a figura (a) - $C_{eq} = 33,333 \mu\text{F}$
 - Para a figura (b) - $C_{eq} = 0,384 \text{ mF}$
 - Para a figura (c) - $C_{eq} = 10,48 \text{ mF}$
 - Para a figura (d) - $C_{eq} = 67,5 \text{ mF}$

Capítulo 10

- Problema 10.1)

- (a) 918,88 Hz
- (b) 25,4 A
- (c) 0,144 A

- Problema 10.2)

- (a) $0,79 - j1,32 \Omega$
- (b) 143,12 A

- Problema 10.3)

- Para a figura (a) - $\mathbf{Z}_{eq} = 3,9 + j0,12 \Omega$
- Para a figura (b) - $\mathbf{Z}_{eq} = j4,927 \Omega$

- Problema 10.5)

- Para a figura (a) - $\mathbf{Z}_{eq(ab)} = 4,35 - j2,71 \Omega$
- Para a figura (b) - $\mathbf{Z}_{eq(ab)} = 5,9 + j3,88 \Omega$
- Para a figura (c) - $\mathbf{Z}_{eq(ab)} = 0 \Omega$

- Problema 10.6)

- Para a figura (a) - $\mathbf{Y}_{eq} = 3,45 - j0,39 \text{ S}$
- Para a figura (b) - $\mathbf{Y}_{eq} = 5,2 + j1,4 \text{ S}$
- Para a figura (c) - $\mathbf{Y}_{eq(ab)} = 1,21 - j1,69 \text{ S}$
- Para a figura (d) - $\mathbf{Y}_{eq(ab)} = 2,53 + j2,45 \text{ S}$

Capítulo 11

- Problema 11.1)

- (a) $14,62 \angle 25,84^\circ \text{ A}$
- (b) $5000 - j2421,63 \text{ VA}$, $2421,63 \text{ VAr}$ e $5555,56 \text{ VA}$
- (c) Ilustração deve ser feita pelo estudante.

- Problema 11.2)

- (a) $14,04^\circ$
- (b) $43,66 \angle -14,04^\circ \Omega$
- (c) Ilustração deve ser feita pelo estudante.

- Problema 11.3)

- (a) 0,591
- (b) 1.230 VAr. É consumida pelo motor, pois ele é uma carga indutiva.

- Problema 11.4)

- (a) 0,923. É indutivo, pois no triângulo de potência, a potência reativa é desenhada como um vetor para cima, o que indica que ela possui valor positivo.
- (b) $17,16 \angle -22,62^\circ \text{ A}$
- (c) $20,5 + j8,5 \Omega$

- Problema 11.5)

- (a) $37,73 \angle -30,96^\circ \text{ A}$
- (b) $7118 + j4270,16 \text{ VA}$, 8300 VA , 7118 W e $4270,16 \text{ VAr}$
- (c) 0,86

- Problema 11.6) $21,84 + j7,18 \Omega$
- Problema 11.7) $4553,18 \text{ W}$ e $-7011,25 \text{ VAr}$

Capítulo 12

- Problema 12.1)
 - (a) $\bar{I}_1 = -0,923 + j0,395$ e $\bar{I}_2 = 1,564 - j0,513$
 - (b) $\bar{I}_1 = -0,591 - j2,069$ e $\bar{I}_2 = 1,598 + j0,591$
 - (c) $\bar{A}_1 = -0,099 - j0,0017$ e $\bar{A}_2 = 2,999 + j0,033$
 - (d) $\bar{I}_1 = 0,1 + j0,3$ e $\bar{I}_2 = 0,9 - j0,3$
 - (e) $\bar{V}_1 = 0,667 - j1,2$ e $\bar{V}_2 = -0,667 - j1,333$
 - (f) $\bar{I}_1 = 1,374 - j0,974$ e $\bar{I}_2 = -0,194 - j0,170$
 - (g) $\bar{X} = 1,405 - j0,568$ e $\bar{Y} = 0,150 - j0,333$

Capítulo 13

- Problema 13.1)
 - Para a figura (a) - $\bar{I}_x = -0,17 - j3,79 \text{ A}$
 - Para a figura (b) - $\bar{I}_x = 0,072 - 6 \text{ A}$
- Problema 13.2)
 - Para a figura (a) - $\bar{I}_x = 6,25 + j5,09 \text{ A}$
 - Para a figura (b) - $\bar{I}_x = 69,83 - j57,55 \text{ A}$
- Problema 13.3)
 - Para a figura (a) - Para a fonte de 8 V a potência complexa é $-5,27 - j1,31 \text{ VA}$ ou equivalentemente pode-se dizer que ela fornece (gera) $5,27 \text{ W}$ e $1,31 \text{ VAr}$. O estudante deve lembrar que a potência é positiva quando consumida e negativa, quando fornecida (gerada). O mesmo vale para a potência reativa, cujo valor encontrado é negativo e isto quer dizer que a fonte está fornecendo (gerando potência reativa). Para a fonte de $5\angle 60^\circ \text{ V}$ a potência complexa é $0,77 - j0,45 \text{ VA}$. Isto quer dizer que esta fonte consome potência ativa (parte real é positiva) e fornece potência reativa (parte imaginária é negativa).
 - Para a figura (b) - A fonte fornece $38,87 + j0,65 \text{ VA}$. Pode-se também escrever que a potência complexa da fonte é $-38,87 - j0,65 \text{ VA}$ e os sinais deixam claros que os valores de potência ativa e reativa são fornecidos.
- Problema 13.4)
 - Para a figura (a) - $\bar{I}_x = -1,98 + j0,98 \text{ A}$, $\bar{I}_w = 10\angle 180^\circ \text{ A}$ e $\bar{I}_y = 6,1 + j4,88 \text{ A}$
 - Para a figura (b) - $\bar{I}_x = 17,62 - j0,55 \text{ A}$, $\bar{I}_w = -6,26 + j5 \text{ A}$ e $\bar{I}_y = -11,36 - j4,46 \text{ A}$
- Problema 13.5)

- (a) $U_{th} = 7,03\angle -7,12^\circ \text{ V}$, $I_N = 1,82\angle 7,88^\circ \text{ A}$ e $\mathbf{Z}_{th} = \mathbf{Z}_N = 3,86\angle -15^\circ \Omega$
- (b) $U_{th} = 10 \text{ V}$, $I_N = 2,5\angle -45^\circ \text{ A}$ e $\mathbf{Z}_{th} = \mathbf{Z}_N = 4\angle 45^\circ \Omega$
- (c) $U_{th} = 12 \text{ V}$, $I_N = 1,55\angle 11,17^\circ \text{ A}$ e $\mathbf{Z}_{th} = \mathbf{Z}_N = 7,74\angle -11,17^\circ \Omega$
- (d) $U_{th} = 7,35\angle 8,45^\circ \text{ V}$, $I_N = 1,69\angle 19,19^\circ \text{ A}$ e $\mathbf{Z}_{th} = \mathbf{Z}_N = 4,35\angle -10,74^\circ \Omega$

Problema 13.6)

- (a) Para $\mathbf{Z}_c = 3 + j1 \Omega$ o valor eficaz da corrente é $19,43 \text{ A}$, enquanto que para $\mathbf{Z}_c = 6 + j1 \Omega$ o valor é $12,90 \text{ A}$
- (b) Para $\mathbf{Z}_c = 3 + j1 \Omega$ o valor eficaz da tensão é $61,43 \text{ V}$, enquanto que para $\mathbf{Z}_c = 6 + j1 \Omega$ o valor é $78,49 \text{ V}$
- (c) Para $\mathbf{Z}_c = 3 + j1 \Omega$ o valor da potência ativa é $1132,2 \text{ W}$, enquanto que para $\mathbf{Z}_c = 6 + j1 \Omega$ o valor é $999,1 \text{ W}$
- (d) Para $\mathbf{Z}_c = 3 + j1 \Omega$ o valor da potência reativa é $377,41 \text{ VAr}$, enquanto que para $\mathbf{Z}_c = 6 + j1 \Omega$ o valor é $166,51 \text{ VAr}$

Capítulo 14

- Problema 14.1) $89,6\%$
- Problema 14.2) $0,93$
- Problema 14.3) $9,75 \text{ A}$
- Problema 14.4) $877,3 + j773,7 \text{ VA}$ obs.: a potência complexa em questão se relaciona com os terminais elétricos no qual a potência entra no motor. Não existe sentido em falar em potência complexa de saída em um motor, pois a potência de saída é de natureza mecânica e, portanto, não tem componente reativa.
- Problema 14.5)
 - (a) $621,25 \text{ W}$
 - (b) $465,94 \text{ VAr}$
 - (c) $3,53 \text{ A}$
- Problema 14.6) $29,5 \mu\text{F}$
- Problema 14.7) $52,1 \mu\text{F}$
- Problema 14.8) opção d
- Problema 14.9) (a) $1,0276 \text{ mF}$ (b) $0,9923$
- Problema 14.10) $\text{R\$ } 3.916,80$
- Problema 14.11) $\text{R\$ } 4.577,80$

Capítulo 15

- Problema 15.1)
 - (a) $32,8 \text{ A}$
 - (b) 12500 VA , -7500 VAr e $10000 - j7500 \text{ VA}$
 - (c) Ilustração deve ser feita pelo estudante.
 - (d) $9,29 - j6,97 \Omega$

- Problema 15.2) $18,54/\underline{-16,7^\circ}\Omega$
- Problema 15.3)
 - (a) 43,74 A
 - (b) 13 333,74 W, 16 667 VA e $13\,333,74 + j10\,000\text{ VA}$
 - (c) $2,32 + j1,74\Omega$
- Problema 15.4)
 - (a) 0,958 capacitivo
 - (b) $4,44 - j1,33\Omega$
 - (c) Ilustração deve ser feita pelo estudante.
- Problema 15.5)
 - (a) $I_l = 14,43\text{ A}$ e $I_f = 8,33\text{ A}$
 - (b) $72/\underline{23,07^\circ}\Omega$
 - (c) Ilustração deve ser feita pelo estudante.
- Problema 15.6)
 - (a) 4 660,6 W, 2 888,4 VAr, 5 483,1 VA e $4\,660,6 + j2\,888,4\text{ VA}$
 - (b) Considerando a tensão da fase a com ângulo zero, então sabendo que a corrente elétrica de fase é igual a linha em uma carga em Y $\bar{I}_a = 8,34/\underline{-31,8^\circ}\text{ A}$, $\bar{I}_b = 8,34/\underline{-151,8^\circ}\text{ A}$ e $\bar{I}_c = 8,34/\underline{88,2^\circ}\text{ A}$ Foi considerado como referência a tensão da fase a com ângulo nulo
 - (c) $26,47/\underline{31,8^\circ}\Omega$
- Problema 15.7)
 - (a) 5 933,7 VAr, 11 628 VA e $10\,000 + j5\,933,7\text{ VA}$
 - (b) $I_l = 11,19\text{ A}$ e $I_f = 6,46\text{ A}$
 - (c) $92,88/\underline{30,68^\circ}\Omega$
- Problema 15.8)
 - Para a figura (a) - $I_l = 30,56\text{ A}$, $I_f = 17,64\text{ A}$, $P_{3\Phi} = 18\,672\text{ W}$, $Q_{3\Phi} = 7\,469\text{ VAr}$, $|S_{3\Phi}| = 20\,111\text{ VA}$ e $\mathbf{S}_{3\Phi} = 18\,672 + j7\,469\text{ VA}$
 - Para a figura (b) - $I_l = I_f = 13,58\text{ A}$, $P_{3\Phi} = 8\,298,9\text{ W}$, $Q_{3\Phi} = 3\,319,5\text{ VAr}$, $|S_{3\Phi}| = 8\,938,1\text{ VA}$ e $\mathbf{S}_{3\Phi} = 8\,298,9 + j3\,319,5\text{ VA}$
 - Para a figura (c) - $I_l = 52,92\text{ A}$, $I_f = 30,56\text{ A}$, $P_{3\Phi} = 56\,017\text{ W}$, $Q_{3\Phi} = 22\,407\text{ VAr}$, $|S_{3\Phi}| = 60\,332\text{ VA}$ e $\mathbf{S}_{3\Phi} = 56\,017 + j22\,407\text{ VA}$
 - Para a figura (d) - $I_l = I_f = 15,09\text{ A}$, $P_{3\Phi} = 17\,082\text{ W}$, $Q_{3\Phi} = -2\,049,8\text{ VAr}$, $|S_{3\Phi}| = 17\,205\text{ VA}$ e $\mathbf{S}_{3\Phi} = 17\,082 - j2\,049,8\text{ VA}$

Capítulo 16

- Problema 16.1)
 - (a) $\bar{I}_{ab} = 76\text{ A}$, $\bar{I}_{bc} = 126,67/\underline{-165^\circ}\text{ A}$ e $\bar{I}_{ca} = 47,5/\underline{150^\circ}\text{ A}$
 - (b) $\bar{I}_a = 119,52/\underline{-11,46^\circ}\text{ A}$, $\bar{I}_b = 201,04/\underline{-170,61^\circ}\text{ A}$ e $\bar{I}_c = 98,96/\underline{34,84^\circ}\text{ A}$
 - (c) $\mathbf{S}_{ab} = 28\,880\text{ VA}$, $\mathbf{S}_{bc} = 48\,134,6/\underline{45^\circ}\text{ VA}$ e $\mathbf{S}_{ca} = 18\,050/\underline{-30^\circ}\text{ VA}$
 - (d) $\text{FP}_{ab} = 1$, $\text{FP}_{bc} = 0,71$ indutivo e $\text{FP}_{ca} = 0,87$ capacitivo
 - (e) $P_{3\Phi} = 78\,548,06\text{ W}$
 - (f) $Q_{3\Phi} = 25\,011,3\text{ VAr}$
 - (g) Ilustração deve ser feita pelo estudante.
- Problema 16.2)
 - (a) $\bar{I}_{an} = \bar{I}_a = 44\text{ A}$, $\bar{I}_{bn} = \bar{I}_b = 73,33/\underline{-165^\circ}\text{ A}$ e $\bar{I}_{cn} = \bar{I}_c = 27,5/\underline{150^\circ}\text{ A}$
 - (b) $\mathbf{S}_a = 9\,680\text{ VA}$, $\mathbf{S}_b = 16\,132,6/\underline{45^\circ}\text{ VA}$ e $\mathbf{S}_c = 6\,050/\underline{-30^\circ}\text{ VA}$
 - (c) $\text{FP}_a = 1$, $\text{FP}_b = 0,71$ indutivo e $\text{FP}_c = 0,87$ capacitivo
 - (d) $P_{3\Phi} = 26\,326,92\text{ W}$
 - (e) $Q_{3\Phi} = 8\,382,47\text{ VAr}$
 - (f) $\bar{I}_n = 50,92/\underline{-174,11^\circ}\text{ A}$
 - (g) Ilustração deve ser feita pelo estudante.
- Problema 16.3) $\bar{I}_A = 9,92/\underline{-38,66^\circ}\text{ A}$, $\bar{I}_B = 9,77/\underline{172,62^\circ}\text{ A}$, $\bar{I}_C = 11,94/\underline{78,81^\circ}\text{ A}$ e $\bar{I}_N = 6,78/\underline{86,84^\circ}\text{ A}$

Capítulo 17

- Problema 17.1)
 - (a) 29,61 A
 - (b) 1 656,67 W
- Problema 17.2) $\eta_{\text{Motor B}} \approx 86,5\% > \eta_{\text{Motor A}} \approx 80,6\%$
- Problema 17.3) 5 440,1 VAr e 220 V
- Problema 17.4)
 - (a) 14 559,74 VAr e 380 V
 - (b) Tensão de fase 220 V e capacitância por fase 0,266 mF
 - (c) Tensão de fase 380 V e capacitância por fase 89,11 μF
- Problema 17.5) O banco deve ter potência reativa trifásica 51,33 kVAr e tensão de linha de 440 V
- Problema 17.6) 703,4 μF /fase se o banco está conectado em estrela e 234,5 μF /fase se o banco está conectado em triângulo
- Problema 17.7) R\$ 2.496,40

- Problema 17.8) O motor opera em torno de 6,97 horas por dia. Obs.: lembre-se de considerar nos seus cálculos que o fator de potência gera pagamento por excedente
- Problema 17.9)
 - (a) 0,85 indutivo
 - (b) R\$18 193,53
- Problema 17.10) R\$ 558,50/kVAr
- Problema 17.11) $\approx 6,33$ mF
- Problema 17.12) 17,35 kVAr
- Problema 17.13)
 - (a) 118,8 kVAr
 - (b) R\$90 514,29

Referências

- [1] Charles K. Alexander and Matthew N. O. Sadiku. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. AMGH Editora Ltda., 2013.
- [2] Charles Close. *Circuitos Elétricos Lineares*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (LTC), 1975.
- [3] Nilo Indio do Brasil. *Sistema Internacional de Unidades*. Editora Interciência, 2002.
- [4] F. A. Furfari. The evolution of power-line frequencies 133 1/3 to 25 hz. *IEEE Industry Applications Magazine*, pages 12–14, Setembro/Outubro 2000.
- [5] F. A. Furfari. Westinghouse and the ac system - 1884-1895. *IEEE Industry Applications Magazine*, pages 8–11, Setembro/Outubro 2002.
- [6] Alexander Gray and G. A. Wallace. *Eletrotécnica - Princípios e aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (LTC), 1977.
- [7] Milton Gussow. *Eletricidade Básica*. Editora Prentice Hall do Brasil Ltda., 2004.
- [8] William H. Hayt Jr. and Jonh A. Buck. *Eletromagnetismo*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (LTC), 2003.
- [9] William H. Hayt Jr. and Jack E. Kemmerly. *Análise de Circuitos em Engenharia*. Makron Books do Brasil Editora Ltda., 1975.
- [10] Albert Paul Malvino. *Eletrônica*. Pearson Makron Books, 1997.

Índice

- Átomo, 18
- Admitância complexa, 206
- Amperímetro, 67
- Análise de malhas, 93, 241
 - Por inspeção, 107
 - Com fontes de corrente, 104, 244
 - Por inspeção, 248
 - Supermalha, 105, 246
- Análise de malhas por inspeção, 107, 248
- Análise de nós, 109, 250
 - Por inspeção, 255
 - Supernó, 112, 252
- Análise de nós por inspeção, 114, 255
- Análise nodal, 109, 250
- Associação de admitâncias, 208
 - Mista, 209
 - Paralelo, 208
 - Série, 208
- Associação de capacitâncias, 177
 - Mista, 179
 - Paralela, 178
 - Série, 177
- Associação de fontes de tensão, 98
- Associação de impedâncias, 195
 - Mista, 198
 - Paralelo, 196
 - Série, 195
- Associação de indutâncias
 - Mista, 170
 - Paralelo, 169
 - Série, 168
- Associação de resistências, 40
 - Mista, 46
 - Paralelo, 43
 - Série, 41
 - Vista de vários terminais, 50
- Canal E2S2 Concursos para Engenharia Elétrica, 4
- Canal Elétrica em Vídeos, 3
- Capacitor, 173
- Carga
 - Trifásica e desequilibrada, 312
- Carga elétrica Q , 19
- Circuitos trifásicos
 - Conexão em Δ , 291, 298
 - Conexão em Y , 289, 293
 - Potências (ativa, reativa, aparente e complexa) trifásicas, 302
 - Transformação Y para Δ e vice-versa, 307
- Coeficiente de temperatura, 30
- Condutância, 23
- Condutores, 22
- Controle e automação, 2
- Correção do fator de potência
 - Monofásico, 277
 - Trifásico, 326
- Corrente elétrica, 19
 - Sentido, 87
- Cosseno, 143
- Curto-circuito, 52
- Diferença de potencial (d.d.p.), 19
- Divisores de tensão e de corrente
 - Constantes, 56
 - Senoidais, 202
- E2S2 - canal, 4
- Efeito Joule, 33
- Eficiência, 322
- Eficiência (rendimento), 134
- Elétrica em Vídeos - canal, 3
- Eletrônica, 2
- Eletroeletrônica, 2
- Eletromecânica, 2
- Eletrosfera, 18
- Eletrotécnica, 2
- Energia, 33
- Estrutura atômica da matéria, 18
- Fasor, 187
- Fio ideal, 22
- Fonte de corrente, 87
- Fotovoltaica, 101
- Geradores elétricos, 1, 288

- Grandezas, 7
- Grau (unidade de ângulo), 140
- Iluminação, 1
- Impedâncias complexas, 192
- Indutor, 163
- Instrumentação, 2
- Isolantes, 22
- Kirchhoff
 - Leis, 91
 - Lei das correntes, 91, 238
 - Lei das malhas, 92, 240
 - Lei das tensões, 92, 240
 - Leis, 237
 - Primeira lei, 91, 238
 - Segunda lei, 92, 240
- Laço, 89
- Lei de Ohm, 22
- Leis de Kirchhoff, 87
- Múltiplos e submúltiplos, 14
 - Giga, mega, quilo, mili, micro e nano, 14
- Malha, 90
- Medidores analógico e digital, 67
- Motor de indução
 - Monofásico, 273
 - Trifásico, 322
- Motores elétricos, 1
- Multímetro, 72
- Nó, 89
- Núcleo, 18
- Números complexos, 151
 - Adição, 154
 - Conjugado complexo, 156
 - Divisão, 157
 - Multiplicação, 155
 - Subtração, 155
- Notação científica, 10
 - Operações de soma, subtração, multiplicação e adição, 12
- Ohmímetro, 70
- Placas fotovoltaicas, 101
- Polaridade
 - Em fontes de tensão, 88, 237
 - Em impedâncias, 237
 - Em resistências, 88
- Potência, 33
- Potência elétrica, 35
- Potências (ativa, reativa, aparente e complexa) monofásicas, 213
- Potências (ativa, reativa, aparente e complexa) trifásicas, 302
- Radiano (unidade de ângulo), 142
- Ramo, 89
- Reatância
 - Capacitiva, 190
 - Indutiva, 189
- Reostato, 32
- Resistência, 22
 - Variando com a resistividade, comprimento e área da seção transversal, 26
 - Variando com a temperatura, 29
- Resistividade, 26
- Resistor, 23
- Semicondutores, 22
- Seno, 143
- Senoidal (sinais senoidais), 147
- Sentido da corrente, 236
- Solução de sistemas de equações lineares, 76
 - Com números complexos (método da igualdade), 229
 - Método da adição, 80
 - Método da igualdade, 79
 - Método da substituição, 77
- Supermalha, 105, 246
- Supernó, 112, 252
- Tangente, 144
- Tarifação, 136
- Telecomunicações, 3
- Tensão, 19
- Teorema
 - de Norton, 123, 263
 - de Thévenin, 119, 259
 - Superposição, 116, 257
- Teorema da superposição, 116, 257
- Teorema de Norton, 123
- Teorema de Pitágoras, 144
- Teorema de Thévenin, 119
- Triângulo de potências, 224, 304
- Triângulo retângulo, 144
- Trigonometria, 140
- Unidades, 7
- Unidades de energia elétrica (J e $\text{kW} \times \text{h}$), 133
- Unidades de potência elétrica (HP, cv e W), 133
- Valor eficaz, 184
- Voltímetro, 69

Wattímetro, 71

Youtube - canal E2S2, 4

Youtube - canal Elétrica em Vídeos, 3